

RICHIAMI DI TEORIA DELL'ELASTICITÀ

1 Generalità

La teoria dell'elasticità coinvolge i campi delle deformazioni, delle tensioni, e del legame tensioni-deformazioni. Tali argomenti vengono sviluppati essenzialmente nel corso di Scienza delle Costruzioni, e lo scopo di queste note è di richiamare brevemente i concetti fondamentali. Tali argomenti sono vitali nella comprensione delle soluzioni approssimate od esatte contenute nel corso di Costruzione di Macchine, quali le travi curve, i tubi in campo elastico ed elastoplastico, i dischi rotanti, ed il metodo degli elementi finiti.

2 Deformazioni

Le deformazioni misurano le variazioni relative di lunghezza ed angolari associate al cubetto infinitesimo. Rispetto agli spostamenti, offrono il vantaggio di essere collegabili alle tensioni. Per esempio, un moto (quasistatico, per non generare carichi inerziali) di traslazione o di rotazione di corpo rigido produce spostamenti, ma non tensioni o deformazioni, e quindi gli spostamenti non sono direttamente collegabili alle tensioni. Si considera per il momento il solo moto di traslazione rigida. Esso produce spostamenti costanti. Una distorsione più complessa, formata da un moto di traslazione di corpo rigido sovrapposto ad una effettiva deformazione del corpo, deve essere espressa partendo dagli spostamenti, modificati in modo da depurarli dalla componente di traslazione rigida, rendendoli quindi adatti ad essere collegati alle tensioni. Tale operazione di depurazione viene esercitata dalla differenziazione, che elimina le costanti, cioè il moto di traslazione rigida. Per questa ragione le deformazioni hanno una definizione di tipo differenziale. Più difficile risulta mostrare con mezzi elementari come eliminare il moto di rotazione rigida.

In elasticità infinitesimale le deformazioni sono espresse in funzione degli spostamenti tramite le seguenti sei equazioni cinematiche :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & ; & & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & ; & & \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & ; & & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & ; & & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (2.1)$$

dove u , v , w rappresentano gli spostamenti di un punto, ed x , y , z le coordinate cartesiane. Le deformazioni ϵ rappresentano variazioni di lunghezza, e gli scorrimenti γ variazioni angolari.

Se si sviluppano le formule delle deformazioni attraverso un apparato tensoriale, le definizioni degli scorrimenti risultano lievemente diverse, dato che questi sarebbero preceduti da $1/2$ rispetto alle definizioni delle formule (2.1) . Nella pratica ingegneristica in genere si adottano per gli scorrimenti le formule (2.1), ormai consolidate nella tradizione ingegneristica.

Nel campo dell'elasticità in grandi deformazioni (elasticità finita) si impiegano vantaggiosamente gli Invarianti di Deformazione, I_1 , I_2 , I_3 , che sono combinazioni delle deformazioni in modo tale che essi risultino indipendenti dalla scelta degli assi Cartesiani. Tale circostanza è benvenuta in elasticità finita, dato che il corpo si muove macroscopicamente, in seguito alle proprie deformazioni, rispetto alla terna Cartesiana. Il primo Invariante, I_1 , rappresenta una media del rapporto tra lunghezze finali ed iniziali degli spigoli di un cubo infinitesimo, il secondo Invariante la superficie finale rapportata all'iniziale del cubetto, ed il terzo Invariante il volume del cubetto deformato rispetto all'indeformato. Per un materiale incompressibile, condizione a cui si avvicinano i materiali elastomerici, $I_3 = 1$. In realtà sono state proposte due diverse terne di Invarianti di Deformazione, detti di Rivlin o di Penn a seconda di sottili differenze qui tralasciate, Invarianti che vengono vantaggiosamente impiegati per esempio nel potente programma agli elementi finiti ABAQUS per descrivere il legame tra tensione e deformazione in materiali elastomerici, spesso soggetti a grandi spostamenti.

Si considerano ora le espressioni delle deformazioni in coordinate polari, avendo in mente applicazioni al campo di corpi di geometria assialsimmetrica e caricati assialsimmetricamente. I tubi ed i dischi rotanti appartengono a tale famiglia di problemi. Si considerano le direzioni radiale e circonferenziale, privilegiate dato che sono principali (Paragrafo 3.1). La deformazione radiale ϵ_r possiede una definizione analoga alle prime tre espressioni nelle (2.1), dove ora u ora rappresenta lo spostamento in direzione radiale della fibra generica definita dal raggio r . La deformazione circonferenziale ϵ_θ si ricava osservando che una fibra circonferenziale definita dal raggio r è lunga $2 \pi r$. Se lo spostamento in direzione radiale è u , la fibra diventa lunga $2 \pi (r + u)$, Figura 2.1 . La variazione di lunghezza di tale fibra circonferenziale, rapportata alla lunghezza iniziale, vale $(2 \pi (r + u) - 2 \pi r)/(2 \pi r) = u/r$. In conclusione :

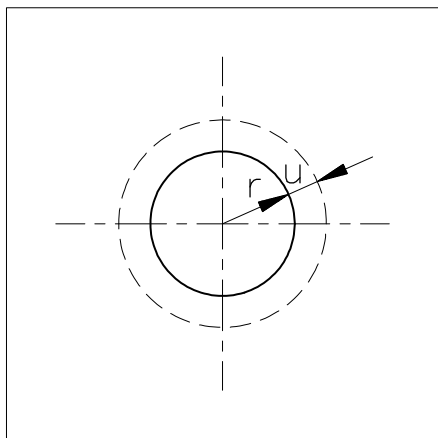


Figura 2.1

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr} \quad ; \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2.2)$$

Deformazioni angolari, cioè scorrimenti, sono assenti perché ci si è riferiti alle direzioni principali.

Si noti infine che la definizione in (2.2) della deformazione circonferenziale non è differenziale, costituendo così un'eccezione rispetto ai commenti svolti all'inizio di questo paragrafo sulla necessità di un operatore differenziale per depurare la deformazione da

moti traslatori rigidi. Tale eccezione è solo apparente. Si pensi ad un tubo

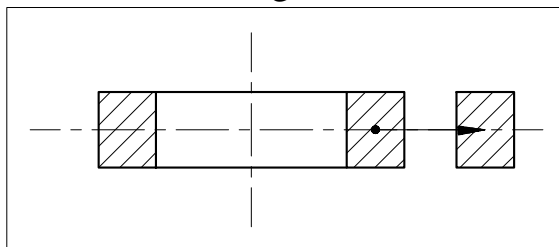


Figura 2.2

sollecitato da pressione interna, rappresentato in Figura 2.2 tramite la sua sezione meridia. Un moto di traslazione rigida in direzione radiale rispetto all'asse di simmetria (che qui svolge più o meno le funzioni dell'asse y in un sistema Cartesiano) della sezione meridia del tubo,

spostamento mostrato in Figura 2.2, deforma l'anello nelle sue fibre circonferenziali, e quindi provoca tra l'altro tensioni circonferenziali. Un moto di corpo rigido non può provocare tensioni, e quindi uno spostamento radiale rigido della sezione del tubo non è un moto rigido dell'anello. Questa impossibilità di moto rigido in direzione radiale è collegata alla mancanza della derivata nella definizione della deformazione circonferenziale.

3 Tensioni

Si distinguono tensioni normali, σ , e tangenziali, τ , le prime agenti perpendicolarmente alla faccia del cubetto elementare, le seconde parallelamente. La Figura 3.1

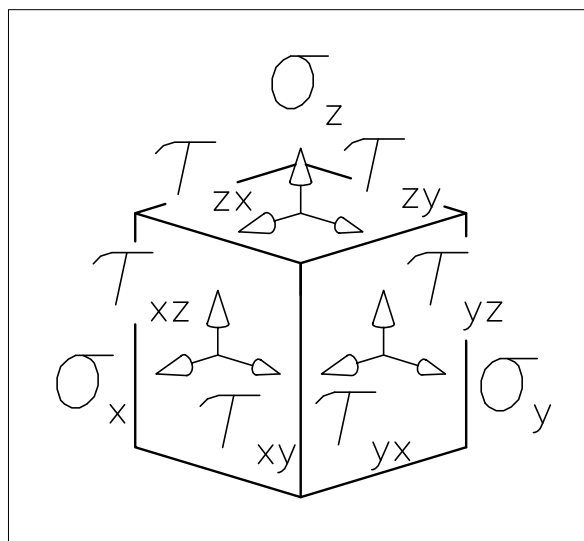
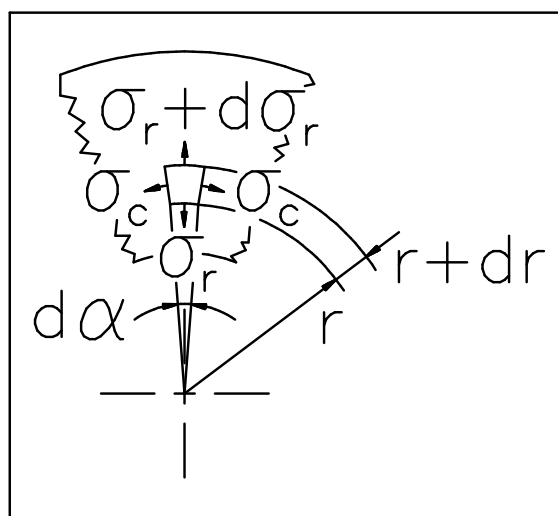


Figura 3.1



in coordinate polari. Tale studio è rilevante per esempio nella teoria dei tubi. Si analizzano corpi di geometria assialsimmetrica, e caricati assialsimmetricamente. Inoltre, si assume che il problema non cambi muovendosi in senso assiale, cioè che il problema sia in stato piano (di tensione o di deformazione, Paragrafo 4). L'asse radiale è indicato come r , la direzione circonferenziale come θ , e la direzione assiale come z . A causa dello stato piano, τ_{rz} e $\tau_{\theta z}$ sono nulli. Dall'ultima delle (3.1), pensata adattata al nuovo sistema di assi, si ricava la costanza di σ_z rispetto a z . Inoltre, a causa dell'assialsimmetria, $\tau_{\theta r}$ è anch'esso nullo. Dei due

presenta le tensioni sulle facce del cubetto. Per ogni faccia, esiste una tensione normale e due tangenziali. Le tensioni, a meno di incrementi infinitesimi, sono uguali su facce opposte del cubetto, per cui in un punto, descritto dal cubetto infinitesimo, esistono $3 \text{ tensioni} \times 3 \text{ facce} = 9$ tensioni indipendenti. Tuttavia, per ragioni di equilibrio alla rotazione, $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, e quindi le componenti indipendenti di tensione sono 6 in un caso tridimensionale. Le equazioni di equilibrio alla traslazione sono, in assenza di forze di massa :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Si considerano ora le equazioni di equilibrio delle tensioni

equilibri possibili sul piano delle tensioni $r - \theta$, l'equilibrio in direzione circonferenziale produce una identità, e quindi non fornisce informazioni. L'equilibrio delle forze in direzione radiale viene formulato con riferimento al concio di Figura 3.2, assumendo le forze centrifughe come positive. Si ottiene :

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\alpha - \sigma_r r d\alpha - 2\sigma_\theta dr \sin \frac{d\alpha}{2} = 0 \quad (3.2)$$

Trascurando l'infinitesimo di ordine superiore $d\sigma_r dr$, e ritenendo $\sin d\alpha \approx d\alpha$, si ottiene :

$$d\sigma_r r + \sigma_r dr - \sigma_\theta dr = 0 \quad (3.3)$$

Dividendo per $r dr$, si ottiene infine l'equazione di equilibrio in direzione radiale :

$$\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (3.4)$$

∞ ∞ ∞ ∞

The history of the mathematical theory of elasticity shows clearly that the development of the theory has not been guided exclusively by considerations of its utility for technical Mechanics. Most of the men by whose researches it has been founded and shaped has been more interested in the Natural Philosophy than in material progress, in trying to understand the world than in trying to make it more comfortable.

A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity
A.E.H.Love

∞ ∞ ∞ ∞

3. 1 Tensioni principali, deformazioni principali, e direzioni principali

In presenza di un certo stato tensionale in un punto, se ci si riferisce ad un cubetto idealmente ruotato rispetto al precedente, le tensioni cambiano con tale rotazione, dove una tecnica che esprime tali cambiamenti, almeno per casi semplificati, è quella grafica del circolo di Mohr. Per una sola posizione di tale cubetto, che corrisponde alle direzioni principali, si annullano tutte le tensioni taglienti, e rimangono solo le tensioni normali, dette tensioni principali. Ad esse corrispondono (in elasticità isotropa) le deformazioni principali, mentre gli scorrimenti si annullano.

Per esempio, in un tubo soggetto a pressione interna le direzioni circonferenziale, radiale ed assiale sono tensioni principali per tutti i punti dato che, orientando gli spigoli del cubetto lungo tali direzioni (o meglio del concio elementare, dato che si lavora in coordinate cilindriche), le tensioni tangenziali sono assenti per ragioni di simmetria. Sulla superficie libera di un pezzo meccanico, per esempio lungo un fianco di un dente di una ruota dentata, fuori dalla zona di contatto coll'altro dente in presa, una delle direzioni principali è perpendicolare alla superficie del dente, dato che su tale superficie le tensioni tangenziali sono assenti, mentre le altre due direzioni principali non sono note a priori. Nella zona di contatto con il dente in presa, invece, agiscono tensioni normali dovute alla pressione di contatto, e tensioni tangenziali dovute all'attrito, e quindi la precedente direzione non è sicuramente una direzione principale.

3.2 Segno delle tensioni tangenziali

Mentre risulta possibile attribuire una fisicità al segno della tensione σ (positiva se di trazione, cioè uscente dalla faccia del cubetto), non è possibile dare un segno fisico alla τ . Esistono purtroppo due convenzioni, ciascuna vantaggiosa in campi diversi.

Segno della τ in problemi di teoria dell'elasticità

Tale convenzione viene impiegata nello studio di problemi strettamente connessi con le equazioni differenziali di equilibrio delle tensioni, per esempio le equazioni (3.1) nel Paragrafo 3 relative ad un riferimento Cartesiano ortogonale. La convenzione sui segni della τ è la seguente: **se la normale uscente alla faccia del cubetto è equiversa all'asse cartesiano x , y , z , a cui è parallela, allora la tensione τ è positiva se orientata secondo la direzione positiva dell'asse a cui è parallela. Se invece la normale uscente alla faccia del cubetto è**

controversa con l'asse cartesiano x , y , z , a cui è parallela, allora la tensione τ è negativa se equivversa all'asse a cui è parallela.

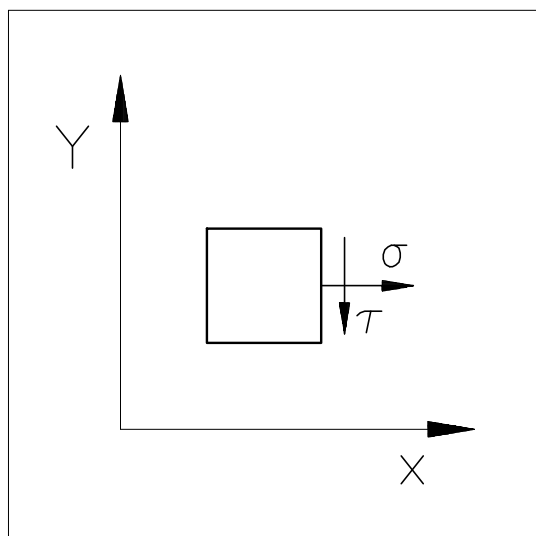


Figura 3.2.1

piano e non tridimensionale, e si esaminano le τ relative alle quattro facce del quadratino elementare. I valori in modulo delle quattro τ sono uguali per reciprocità. Inoltre la convenzione appena esposta sui segni della τ porta ad attribuire alle τ delle quattro facce lo stesso segno, in aggiunta allo stesso valore in modulo. Di conseguenza, in un punto del continuo meccanico piano, punto rappresentato dal quadratino infinitesimo, la τ ha un unico valore in modulo ed in segno, cioè costituisce una unica entità. Per esempio, in Figura 3.2.2 le quattro τ sono tutte positive perché, dove la σ è equivversa con l'asse a cui è parallela (facce a e b), la τ è anch'essa equivversa con l'asse a cui è parallela, e dove la σ è controversa con l'asse a cui è parallela (facce c e d), anche la τ è controversa con l'asse a cui è parallela. Questa unicità della τ in un punto è un indice a favore della fisicità della convenzione appena sviluppata.

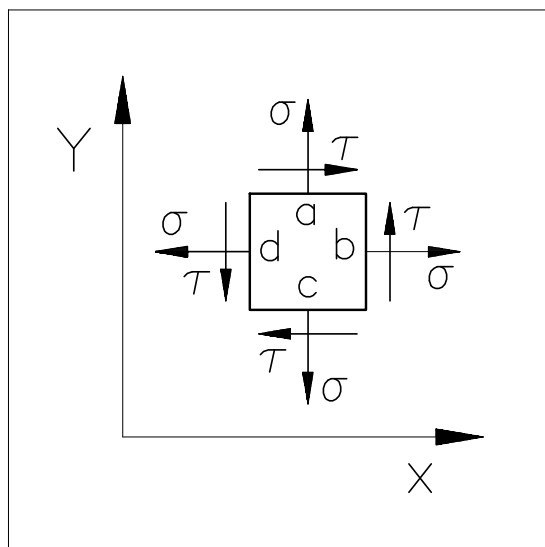


Figura 3.2.2

Tale convenzione sul segno della τ è per esempio adottata nei programmi agli Elementi Finiti dove, anche se in modo approssimato, si impongono equazioni di equilibrio alle tensioni. L'output degli elementi

finiti va quindi interpretato, relativamente al segno della τ , secondo questa convenzione.

Segno della τ nell'uso del circolo di Mohr

Si ricorda che gli angoli impiegati nel circolo di Mohr vanno raddoppiati rispetto a quelli relativi al quadrato elementare. Due facce adiacenti del quadratino distano di 90° , e quindi le loro rappresentazioni nel circolo di Mohr distano di 180° . Di conseguenza, due punti che rappresentano due facce adiacenti nel quadrato elementare sono diametralmente opposti nel circolo di Mohr. Siccome il centro del circolo di Mohr giace sull'asse delle σ , due punti diametralmente opposti devono avere uno un valore negativo di τ , e l'altro punto un valore positivo di τ (oppure entrambe le τ sono nulle). In conclusione, in facce adiacenti del quadrato elementare i segni delle τ devono essere discordi, cioè una τ è positiva e l'altra è negativa. Occorre quindi che la convenzione da adottare sui segni della τ esprima il fatto che facce adiacenti del quadratino elementare possiedono segni di τ discordi. Una possibile convenzione è la seguente: **sono positive le τ che provocano (se agissero da sole) rotazione oraria; sono invece negative le τ che provocano (se agissero da sole) rotazione antioraria. Tale convenzione deve essere associata ad un'altra regola: si deve ruotare nello stesso verso sia nel circolo di Mohr che nel quadrato elementare, dove gli angoli impiegati nel circolo di Mohr sono doppi rispetto a quelli fisici** (vedi Paragrafo 3.3).

Per esempio, in Figura 3.2.3 le τ della coppia di facce opposte a e c sono positive perché causano rotazione oraria, mentre le τ della coppia di facce opposte b e d sono negative perché producono rotazione antioraria. Di conseguenza, in un punto del continuo meccanico piano, punto rappresentato dal quadrato infinitesimo, con questa convenzione la τ non

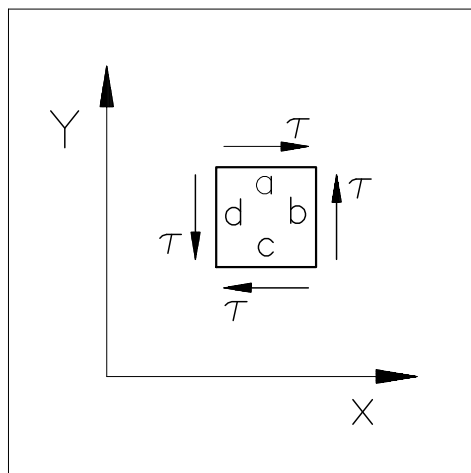


Figura 3.2.3

possiede un unico segno, dato che due facce opposte hanno τ positiva, e le altre due facce opposte hanno τ negativa. Questa mancanza di unicità del segno della τ in un punto tradisce una carenza di fisicità nella convenzione sopra sviluppata.

Questa convenzione sul segno della τ viene adottata nei campi in cui si deve impiegare il circolo di Mohr, principalmente in estensimetria, dove i rami della rosetta estensimetrica (vedi il Capitolo sulla Estensimetria) forniscono

dati deformativi relativamente a direzioni non principali, dati dai quali si riescono a derivare direzioni e tensioni principali tramite l'impiego del circolo di Mohr. Un altro campo in cui si impiega il circolo di Mohr è quello della diagnostica sulle rotture. Quando per esempio un albero si rompe secondo un piano di frattura ben definito, ci si domanda quali particolarità tensionali possiede questo piano. Lo stato tensionale del quadrato elementare avente un lato orientato come il piano di frattura, si determina tramite il circolo di Mohr, e spesso permette di chiarire se la rottura è avvenuta a causa di un valore elevato delle tensioni σ o delle tensioni τ , cioè se la rottura è dovuta a tensioni normali (le trattive sono più pericolose delle compressive) od a tensioni taglianti. Si veda a questo proposito l'esempio relativo a rotture a becco di flauto in molle elicoidali, sviluppato nel Paragrafo 3.3.1.

Gli aspetti connessi col circolo di Mohr e con la rotazione del quadrato elementare vengono trattati nel Paragrafo seguente

Come ultima osservazione, si noti che la convenzione sul segno della τ valida in problemi di teoria dell'elasticità viene impiegata in relazione alle equazioni di equilibrio, cioè in connessione con problemi di campo, governati dai legami tra le tensioni in punti adiacenti, legami espressi appunto dalle equazioni differenziali di equilibrio. La convenzione sul segno della τ valida nell'uso del circolo di Mohr viene impiegata in relazione a problemi puntuali e non di campo, quando cioè si vuole analizzare lo stato tensionale in un unico punto. In problemi di fotoelasticità si impiegano entrambe le convenzioni sul segno della τ . In particolare, si impiega la convenzione valida nell'uso del circolo di Mohr quando si vogliono individuare le tensioni riferite ad una certa scelta di assi Cartesiani, mentre si impiega la convenzione sul segno della τ valida in problemi di teoria dell'elasticità quando si vogliono calcolare le tensioni lungo una retta, impiegando le equazioni di equilibrio.

3.3 Il circolo di Mohr

Il circolo di Mohr è una tecnica grafica per determinare come cambiano le tensioni in un cubetto elementare quando questo viene ruotato attorno ad un asse. Più esattamente, la tecnica del circolo di Mohr è applicabile, almeno nella sua forma più semplice, ad un cubetto non genericamente posizionato nello spazio, ma tale che una coppia di facce opposte è perpendicolare ad una delle tre direzioni principali. Inoltre la rotazione del cubetto deve avvenire attorno ad un asse di direzione

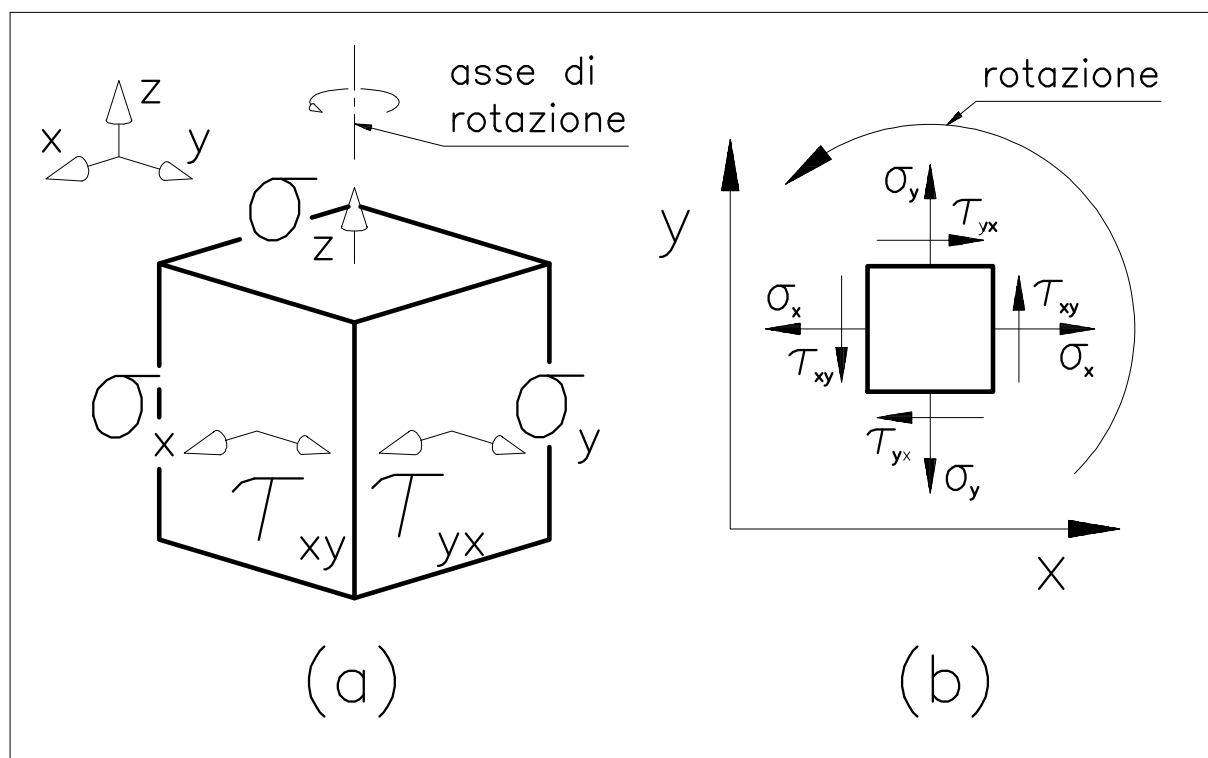


Figura 3.3.1

coincidente con tale direzione principale. Il circolo di Mohr permette di determinare come cambiano le tensioni σ e τ sulle rimanenti quattro facce. La Figura 3.3.1 (a) mostra appunto il cubetto nello spazio, con le facce superiore ed inferiore soggette a sola σ e non a τ , dato che la direzione z è principale. Il circolo di Mohr permette di prevedere come cambiano le tensioni σ_x , σ_y , τ_{xy} , e τ_{yx} (uguale in modulo, ma opposta in segno, a τ_{xy}), quando si effettua una rotazione attorno all'asse in direzione z , come indicato in Figura 3.3.1 (a). Siccome il circolo di Mohr consente di calcolare come cambiano, in seguito ad una rotazione, le tensioni σ_x , σ_y , τ_{xy} , e τ_{yx} , cioè quelle relative al piano $x - y$, di solito si rappresenta soltanto il quadratino delle tensioni relative al piano $x - y$, e non più il cubetto, come appunto mostrato in Figura 3.3.1 (b). Si parla quindi di lati del quadrato elementare, e non di facce del cubetto elementare.

Si sviluppa nel seguito un semplice esempio di impiego del circolo di Mohr. Si considera il quadratino di Figura 3.3.2 (a), dove la σ è assunta come al solito positiva se di trazione, mentre per la τ si adotta la convenzione indicata nel Paragrafo 3.2 relativamente all'impiego del circolo di Mohr. La τ del lato a , se agisse da sola, provocherebbe una rotazione antioraria, e quindi è negativa. Il lato a possiede quindi una $\sigma = +1$ ed una $\tau = -3$, per cui la rappresentazione del lato a nel piano di Mohr $\sigma - \tau$ è il punto a di Figura 3.3.2 (b). Similmente, la τ del lato b , se agisse

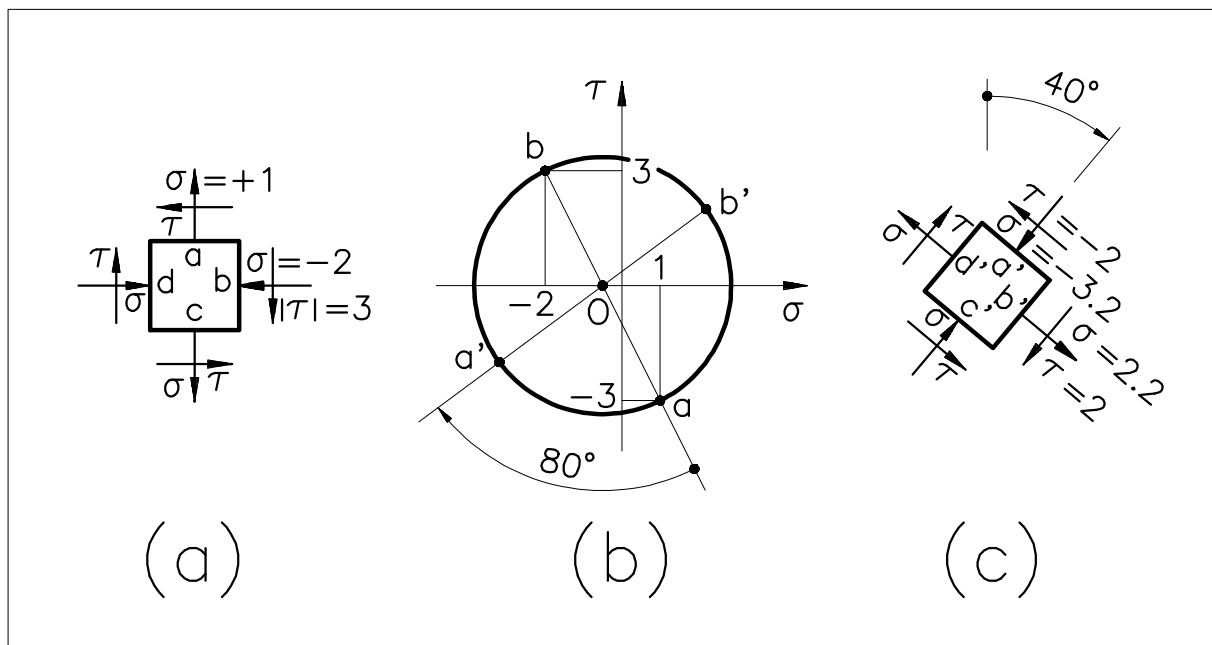


Figura 3.3.2

da sola, darebbe rotazione oraria, e quindi è positiva. Il lato b possiede quindi una $\sigma = -2$ ed una $\tau = +3$, per cui la rappresentazione del lato b nel piano di Mohr è il punto b di Figura 3.3.2 (b). Il lato c ha la stessa rappresentazione nel piano di Mohr del lato a , ed il lato b ha la stessa rappresentazione del lato d . Per questa ragione, si considerano soltanto i lati a e b .

I due punti a e b appartengono al circolo di Mohr relativo al quadratino elementare di Figura 3.3.2 (a). Si sa inoltre che tali punti sono diametralmente opposti nel circolo di Mohr (cioè distanti 180°), dato che essi descrivono due lati adiacenti del quadrato elementare, che distano quindi 90° , e dato che gli angoli reali vanno raddoppiati quando si usa il circolo di Mohr.

Per determinare completamente il circolo di Mohr, occorre determinare la posizione del suo centro. Si congiungono i due punti a e b del piano di Mohr (Figura 3.3.2 (b)), ed il punto in cui il segmento $a - b$ interseca l'asse delle σ è il centro del circolo di Mohr. Il circolo di tale centro, e che passa per i punti a e b , è il circolo di Mohr relativo al quadrato elementare di Figura 3.3.2 (a), ed è rappresentato in Figura 3.3.2 (b).

Se si vogliono calcolare le tensioni nel quadrato elementare di Figura 3.3.2 (a), ma ruotato di 40° in senso orario, quadrato elementare mostrato in Figura 3.3.2 (c), si ruota nel circolo di Mohr di 80° (il doppio di 40°) e **nello stesso senso** (cioè in questo caso in senso orario), individuando i punti a' e b' nel piano di Mohr (Figura 3.3.2 (b)) rappresentativi dello stato

tensionale nei lati a' e b' del quadrato elementare ruotato di 40° di Figura 3.3.2 (c) . I valori di σ e di τ dei punti a' e b' di Figura 3.3.2 (b) sono quelli che agiscono sul quadrato elementare ruotato di Figura 3.3.2 (c) . I valori numerici delle relative tensioni sono stati riportati sul quadratino ruotato. Si notino in particolare i segni della τ nel quadratino ruotato.

Inoltre il circolo di Mohr permette di determinare le direzioni e le tensioni principali. Basta infatti ruotare il quadrato elementare fino a che le tensioni τ si annullano.

Si riassume il procedimento impiegato per calcolare le tensioni in un quadrato elementare ruotato :

- si determinano nel piano di Mohr $\sigma - \tau$ i due punti che descrivono due lati adiacenti del quadratino nella posizione iniziale;
- l'intersezione tra il segmento che congiunge questi due punti e l'asse σ del piano di Mohr individua il centro del circolo di Mohr, che risulta quindi completamente definito e si può tracciare;
- si ruota nel circolo di Mohr di un angolo doppio rispetto a quello di rotazione del quadratino, e nello stesso senso, individuando i punti rappresentativi dello stato tensionale sui lati del quadrato ruotato, dove il segno della τ va interpretato alla luce delle convenzioni sul circolo di Mohr;
- si riportano infine i valori di tali tensioni sui lati del quadrato ruotato.

Si conclude osservando che il circolo di Mohr, il diagramma del momento flettente in travi, ed il diagramma lineare dei tubi sono tre campi in cui schizzi a mano libera di tali costruzioni grafiche possono aiutare il progettista nella comprensione del comportamento meccanico delle strutture.



Il triciclo di Mohr

3.3.1 Applicazione del circolo di Mohr alla diagnostica sulla rottura di una molla elicoidale

Si considera una molla ad elica cilindrica di compressione, con terminali spianati. Normalmente tale molla si rompe in prossimità dei terminali, dove il filo è ancora di sezione circolare, ma in una zona

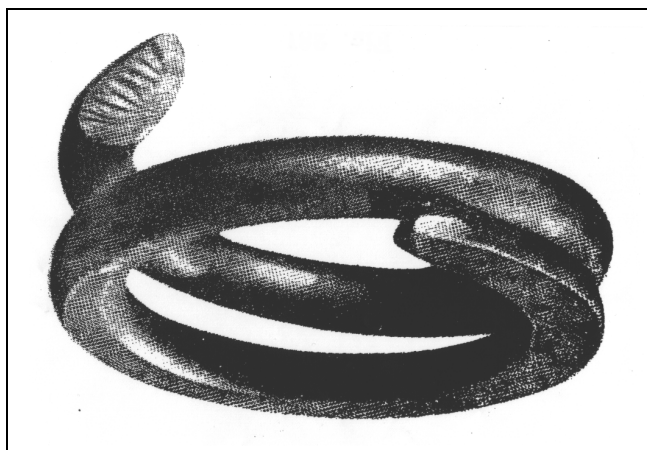


Figura 3.3.1.1

abbastanza vicina all'inizio della rastrematura del filo a causa delle spianature dei terminali. Il piano di frattura è inoltre a becco di flauto, cioè inclinato a 45° . Queste peculiarità della frattura risultano evidenti dalla Figura 3.3.1.1. Le ragioni di questa posizione preferenziale di frattura verranno studiate nel Capitolo sulle molle. Per il momento si vuole indagare tramite il circolo di Mohr se la particolare inclinazione a 45° del piano di frattura è un indice del tipo di tensioni che hanno provocato il collasso, se cioè il materiale ha ceduto a σ od a τ .

La Figura 3.3.1.2 mostra la prevalente caratteristica di sollecitazione agente sul filo della molla, cioè il momento torcente, e ne chiarisce il verso in seguito alla compressione della molla. La

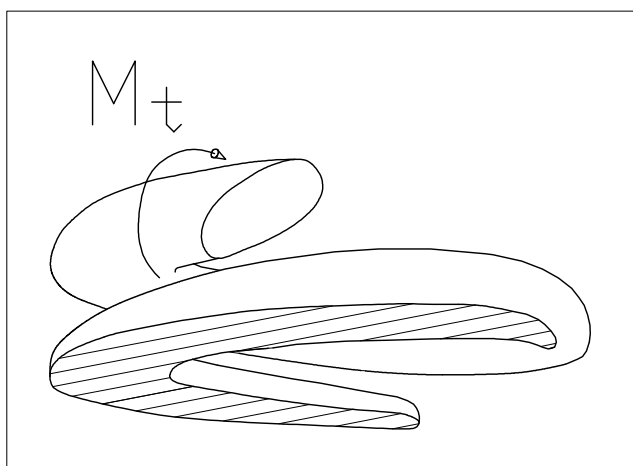


Figura 3.3.1.2

La Figura 3.3.1.3 (a) raffigura la molla fratturata di Figura 3.3.1.1, con evidenziato il carico P di compressione della molla, ed il momento torcente M_t in vicinanza della frattura, causato dal carico P . L'ingrandimento (d) mostra il quadrato elementare con i versi delle τ causate dal momento torcente (il momento torcente produce solo τ e non σ), in prossimità del punto A all'intradosso, zona da cui inizia il crack dato che in A le tensioni τ sono lievemente maggiori di quelle all'estradosso (vedi il Capitolo sull'Effetto Intaglio).

Figura 3.3.1.3 (a) raffigura la molla fratturata di Figura 3.3.1.1, con evidenziato il carico P di compressione della molla, ed il momento torcente M_t in vicinanza della frattura, causato dal carico P . L'ingrandimento (d) mostra il quadrato elementare con i versi delle τ causate dal

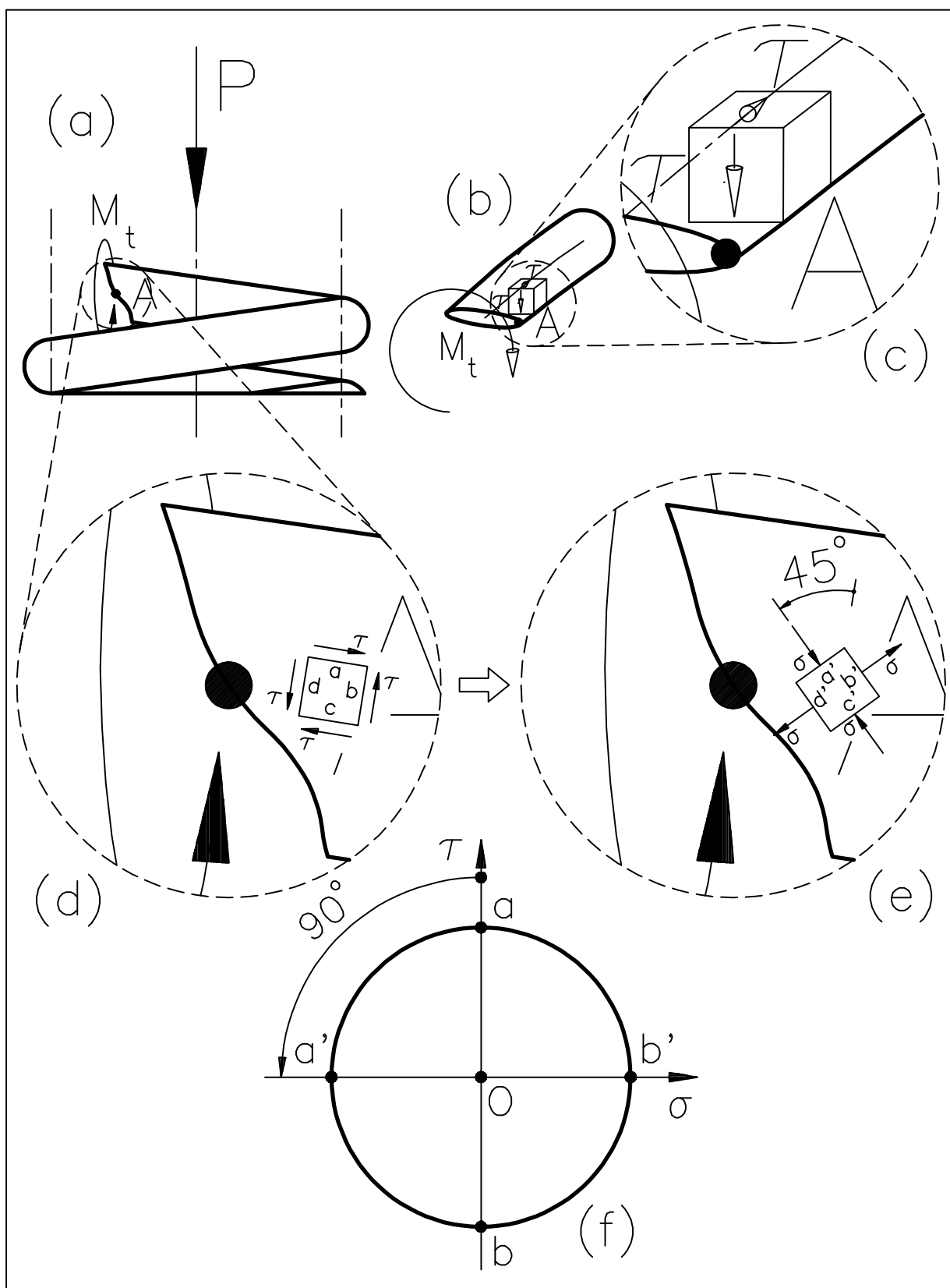


Figura 3.3.1.3

In (b) si rappresenta assonometricamente il moncone della molla in vicinanza della frattura, evidenziando nell'ingrandimento (c) i versi delle tensioni τ torsionali nell'intorno del punto A, versi già rappresentati in (d) .

In (e) si rappresenta una variazione dell'ingrandimento (d) . In particolare, in (e) si analizza lo stato tensionale in un quadratino ruotato rispetto a quello di (d) di 45° in senso antiorario, in modo che in (e) il lato d' del quadrato ruotato diventi parallelo alla linea di frattura. Il circolo di Mohr di Figura (f) si riferisce ai quadrati elementari delle Figura (d) (lati a e b) ed (e) (lati a' e b') : Si ricorda che nel circolo di Mohr basta rappresentare due facce adiacenti del quadrato elementare, e non le quattro facce.

Siccome le τ dei lati a e c della Figura (d) producono rotazione oraria, esse sono positive. La faccia a è descritta nel circolo di Mohr di Figura (f) da un punto con σ nulla (il momento torcente non provoca σ) e con τ positiva. Siccome poi le τ dei lati b e d della Figura (d) producono rotazione antioraria, esse sono negative. La faccia b è quindi rappresentata nel circolo di Mohr di Figura (f) da un punto con σ nulla e con τ negativa.

Si noti che la rotazione antioraria di 45° in senso antiorario del quadrato elementare nel passare dalla Figura (d) alla (e) corrisponde ad una rotazione antioraria (cioè nello stesso senso) di 90° (angolo doppio) nel circolo di Mohr di Figura (f) .

Appare dal circolo di Mohr (f) che il quadratino ruotato di Figura (e) è soggetto ad una σ compressiva sulla faccia a' , e ad una σ trattiva sulla faccia b' . Invece le τ si sono annullate, il che significa che il quadratino di Figura (e) è orientato secondo le direzioni principali, e che le tensioni σ agenti sul quadrato ruotato sono tensioni principali.

Siccome appare dalla Figura 3.3.1.3 che il crack si sviluppa lungo una direzione parallela alla faccia b' , cioè perpendicolare alla σ trattiva agente sulla faccia b' , si conclude che l'acciaio della molla ha ceduto per σ di trazione, cioè per distacco, e non per τ . Si noti che, una volta chiarito che l'acciaio della molla cede per σ e non per τ , è certo che l'acciaio cede



Figura 3.3.1.3

per σ di trazione e non per σ di compressione, dato che i materiali metallici resistono meglio a compressione che a trazione. In conclusione, l'uso del circolo di Mohr ha chiarito che **il crack nella molla si sviluppa in direzione perpendicolare alla tensione principale di trazione**, e cioè che questo acciaio cede per σ e non per τ .

Fratture a 45° si incontrano nelle ossa lunghe umane. Per esempio negli sciatori la frattura della tibia a torsione in seguito a cadute è a becco di flauto. In Figura 3.3.1.3 le due estremità della frattura a becco di flauto della tibia sono segnate da due frecce. L'osso cede quindi per σ e non per τ .

3.4 Componenti tensionali idrostatica e deviatorica

Uno stato tensionale in un punto, definito dalle sei componenti indipendenti di tensione, può essere pensato formato dalla somma di due parti, una idrostatica ed una deviatorica. La parte idrostatica modifica il volume del cubetto senza alterarne la forma (che quindi rimane cubica), mentre la componente deviatorica modifica la forma senza alterarne il volume. Convieni per semplicità pensare il cubetto orientato lungo le direzioni principali. La parte idrostatica è definita come la media delle tre tensioni principali, e tale valor medio è pensato applicato in valore uguale lungo le tre facce. Quindi il cubetto assoggettato alla parte idrostatica delle tensioni si comporta come una sfera in fondo al mare.

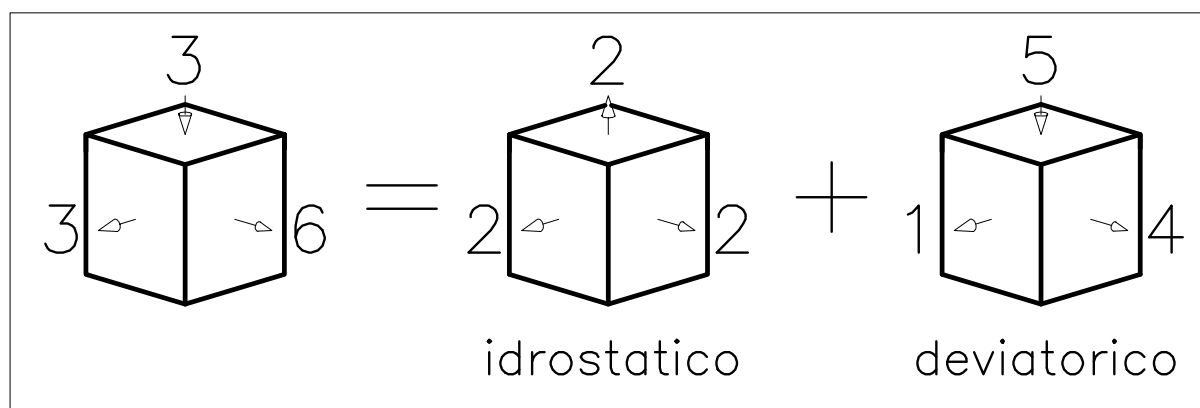


Figura 3.4.1

La parte deviatorica è definita per differenza, cioè è quella tensione che, aggiunta alla parte idrostatica, ripristina lo stato tensionale iniziale. La Figura 3.4.1 rappresenta un cubetto orientato lungo le direzioni principali, distinto nella parte idrostatica ed in quella deviatorica delle tensioni.

La separazione tra parte idrostatica e deviatorica delle tensioni è rilevante soprattutto in organi elastomerici, caratterizzati da una quasi incomprimibilità del materiale. Allora, la parte idrostatica, anche se alta, deformerà comunque poco il cubetto, a causa della scarsa comprimibilità del materiale, mentre la parte deviatorica produrrà deformazioni ben più rilevanti. In altre parole, è facile distorcere una sfera di gomma piena, ma è difficile schiacciarla volumetricamente. Proprio per questi caratteri totalmente diversi tra tensioni idrostatica (e conseguenti deformazioni) e tensione deviatorica (e conseguenti deformazioni) in materiali quasi incomprimibili, i programmi agli elementi finiti orientati ai materiali poco comprimibili trattano queste due parti con approcci diversi.

4 Legame tensioni - deformazioni

In elasticità lineare, il legame tra tensioni e deformazioni è espresso dalla legge di Hooke :

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad ; \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\tag{4.1}$$

dove E rappresenta il modulo di elasticità o di Young, ν il coefficiente di Poisson, e G il modulo di elasticità tangenziale :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}\tag{4.2}$$

Le costanti elastiche indipendenti sono quindi soltanto due, e nella pratica ingegneristica sono usualmente E e ν (essendo quindi G variabile derivata). Per un acciaio, $E = 210000$ MPa , e $\nu = 0.3$. Per un materiale incomprimibile, $\nu = 0.5$.

Le equazioni (4.1) possono essere invertite, ad esprimere le tensioni in funzione delle deformazioni. L'inversione delle prime tre equazioni fornisce :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) + \frac{E}{1+\nu} \epsilon_z\end{aligned}\tag{4.3}$$

L'inversione delle seconde tre equazioni è immediata.

Si considera ora il caso di tensione piana, caratterizzato da $\sigma_z = 0$ e da $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Il significato fisico di tensione e di deformazione piana verrà esaminato nel Paragrafo 6 . Le prime due equazioni nelle (4.1) diventano, ponendo $\sigma_z = 0$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \quad (4.4)$$

che, risolte in funzione di σ , danno :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad ; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (4.5)$$

Dalla terza equazione delle (4.1) si ottiene, ponendo $\sigma_z = 0$:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.6)$$

Tale risultato è significativo in fotoelasticità, dove la differenza delle tensioni può essere letta localmente dalle frange fotoelastiche, mentre è difficile conoscere separatamente le tensioni nel piano $x - y$. Se si misura la deformazione in direzione dello spessore del provino piano, essa è collegata tramite la (4.6) alla somma delle tensioni nel piano, e quindi si possono derivare (fotoelasticamente si parla di separare) le tensioni nel piano attraverso la fonte fotoelastica e la misura della deformazione dello spessore. Introducendo le (4.5) nelle (4.6) si ottiene :

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{(1-\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.7)$$

Si considera infine il caso di deformazione piana, caratterizzato da $\varepsilon_z = 0$ e da $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Le prime due equazioni nelle (4.3) diventano, ponendo $\varepsilon_z = 0$:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_y \right) \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_x \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

e la terza equazione delle (4.3) diventa :

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (4.9)$$

oppure, tramite le prime due equazioni delle (4.1) :

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (4.10)$$

Anche questa equazione, similmente alla (4.6) può essere impiegata in esperimenti fotoelastici in deformazione piana. La lettura della tensione perpendicolare al piano delle tensioni permette di calcolare la somma delle tensioni nel piano, mentre la fotoelasticità ne fornisce la differenza. Da questi dati si possono quindi separare le tensioni.

Nel seguito si vuole interpretare fisicamente il fatto che, nel caso di tensione piana, la formula (4.4) che esprime le deformazioni ϵ_x ed ϵ_y in funzione delle tensioni σ_x e σ_y , presenta il segno meno davanti al termine che moltiplica il coefficiente di Poisson, ν . Viceversa, sempre nel caso di tensione piana, la formula (4.5) che esprime le tensioni σ_x e σ_y in funzione delle deformazioni ϵ_x ed ϵ_y , presenta il segno più davanti al termine che moltiplica il coefficiente di Poisson, ν .

Si consideri la Figura 4.1, che rappresenta una lastra indeformata in spessore sottile (in direzione z), dove si è rappresentato il cubetto elementare indeformato al centro della lastra, Figura 4.1 (a). In Figura 4.1 (b) la lastra viene caricata da una tensione trattiva σ_x , per cui la lastra si allunga in direzione x , mentre si restringe in direzione y e nello spessore. Di conseguenza, nel cubetto elementare deformato si è indicata una deformazione ϵ_x positiva (la lastra si allunga in direzione x) ed una

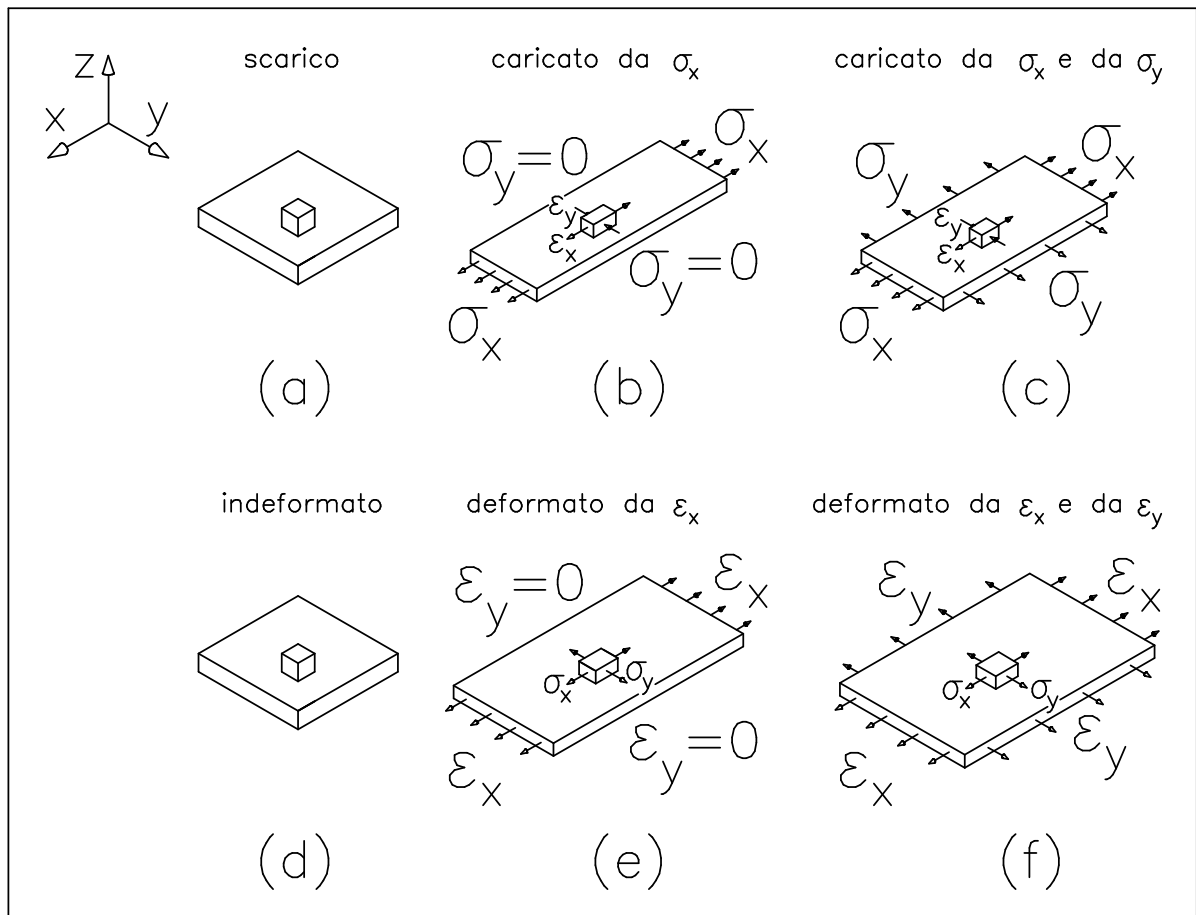


Figura 4.1

deformazione ϵ_y negativa (la lastra si accorcia in direzione y). In Figura 4.1 (c) la lastra viene caricata, oltre che da una tensione trattiva σ_x di intensità uguale a quella impiegata in Figura (b), anche da una tensione trattiva σ_y (immaginata di intensità nettamente inferiore alla σ_x), per cui ci si aspetta su basi fisiche che la lastra si allunghi ancora in direzione x , ma meno che nel caso (b), e che si restringa ancora in direzione y , ma meno che nel caso (b). Di conseguenza, nel cubetto elementare deformato si sono indicate ancora una deformazione ϵ_x positiva ed una deformazione ϵ_y negativa, cercando però di rappresentare nella Figura (c) il cubetto deformato col lato in direzione x meno allungato di quello in Figura (b), e col lato in direzione y meno accorciato di quello in Figura (c).

L'osservazione più importante è che l'applicazione di una tensione trattiva σ_y in aggiunta alla tensione trattiva σ_x **riduce** il valore della ϵ_x . In altre parole, la deformazione ϵ_x cresce con σ_x e cala con σ_y . Questi risultati giustificano per via fisica, nella formula in tensione piana che esprime la deformazione ϵ_x in funzione delle tensioni σ_x e σ_y , la presenza del segno meno davanti al termine che contiene σ_y :

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \quad (4.11)$$

Si considera ora il caso in cui alla lastra vengono imposte delle deformazioni e non delle tensioni. La Figura 4.1 (d) rappresenta una lastra indeformata di piccolo spessore, dove si è rappresentato il cubetto elementare indeformato al centro della lastra. In Figura 4.1 (e) la lastra viene allungata in direzione x da una deformazione applicata ϵ_x , mentre il fatto che si sia imposto $\epsilon_y = 0$ implica che la lastra non si allarga né si restringe in direzione y . Di conseguenza, ci si aspetta su basi fisiche che nel cubetto elementare deformato nascano una tensione σ_x ed una tensione σ_y entrambe positive, dove in particolare la σ_y è positiva perché impedisce restringimenti della lastra in direzione y . In Figura 4.1 (f) la lastra viene deformata, oltre che da un allungamento ϵ_x di intensità uguale a quello imposto in Figura (e), anche da un allungamento ϵ_y (immaginato di intensità nettamente inferiore ad ϵ_x), per cui ci si aspetta su basi fisiche che nel cubetto elementare deformato della Figura (f) nascano ancora tensioni σ_x e σ_y positive, ma che tali tensioni risultino maggiori di quelle della Figura (e). In particolare, la σ_x della Figura (f) è maggiore della σ_x della Figura (e) perché l'effetto dell'applicazione della ϵ_y in Figura (f) è quello di tentare di produrre un accorciamento della lastra in direzione x . Similmente, la σ_y della Figura (f) è maggiore della σ_y della Figura (e) perché l'applicazione della ϵ_y in Figura (f) impone, rispetto alla Figura (e), un allargamento della lastra in direzione y , allargamento che è coerente con un valore maggiorato di σ_y .

L'osservazione più importante è che l'applicazione di una deformazione ϵ_y in aggiunta alla ϵ_x **aumenta** il valore della σ_x . In altre parole, la tensione σ_x cresce sia con ϵ_x che con ϵ_y . Questi risultati giustificano per via fisica, nella formula in tensione piana che esprime la tensione σ_x in funzione delle deformazioni ϵ_x ed ϵ_y , la presenza del segno più davanti al termine che contiene ϵ_y :

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad (4.12)$$

L'analisi delle tensioni e delle deformazioni nella lastra sottile di Figura 4.1 non è un mero esercizio accademico, dato che le situazioni indagate corrispondono strettamente ad una apparecchiatura sperimentale correntemente impiegata per esempio dai produttori di pneumatici per determinare il legame $\sigma - \epsilon$ (legame costitutivo) in elastomeri. Una sottile

lastra elastomerica viene infatti caricata e deformata da tensioni e da deformazioni imposte, al fine di chiarire il legame costitutivo nonlineare.

Si è già riportata l'espressione della costante elastica derivata G , chiamata modulo di elasticità tangenziale, in funzione delle costanti elastiche indipendenti E e ν . Oltre a questa costante elastica, risulta di impiego abbastanza frequente un'altra costante elastica derivata, il **Bulk Modulus** o Coefficiente di comprimibilità cubica, K . Esso esprime la variazione relativa di volume del materiale quando viene assoggettato ad una pressione idrostatica. Il Coefficiente di comprimibilità cubica viene per esempio impiegato nella formulazione della tensione ideale secondo il Lavoro di Distorsione nel Capitolo sulle tensioni ideali, per eliminare l'effetto della parte idrostatica delle tensioni. Inoltre il valore di K è richiesto dai programmi agli elementi finiti che possiedono release specifiche per materiali elastomerici.

Fisicamente, si pensi ad una sfera di gomma in fondo al mare. La sua variazione percentuale di volume $\Delta V/V$ è collegabile alla pressione idrostatica p tramite il Coefficiente di comprimibilità cubica K :

$$p = K \frac{\Delta V}{V} \quad (4.13)$$

Le convenzioni sui segni vengono scelte in modo che K risulti positivo. Siccome la pressione idrostatica p applicabile negli esperimenti è positiva (è una pressione), la variazione percentuale di volume $\Delta V/V$ che risulta dall'applicazione di p , e cioè una diminuzione di volume, deve essere intesa come positiva. In conclusione, ΔV è positivo se corrisponde ad una diminuzione di volume.

Per memorizzare correttamente la (4.13) (per non ricordarla cioè nella forma errata $\Delta V/V = K p$), conviene notare che tale formula possiede una struttura analoga alla $\sigma = E \epsilon$ del caso monodimensionale, dove la costante elastica E moltiplica la deformazione ϵ per ottenere la tensione σ . Similmente, nella (4.13) la costante elastica K moltiplica la deformazione volumetrica $\Delta V/V$ per ottenere la pressione p , equivalente alla tensione σ del caso monodimensionale.

Si vuole nel seguito calcolare il valore di K in funzione delle due costanti elastiche E e ν . Conviene nei calcoli considerare un cubo indeformato con spigoli di lunghezza unitaria, $l = 1$, e quindi di volume unitario, $V = 1$, soggetto alla pressione idrostatica p . Ogni lato si accorcia di Δl , variabile che va intesa come positiva. Siccome il lato indeformato è di lunghezza unitaria, si ha:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta l}{l} = -\frac{\Delta l}{1} = -\Delta l \quad (4.14)$$

e quindi ε è negativo se il cubo diminuisce di volume.

Il volume $V - \Delta V$ rimpicciolito dall'effetto della pressione idrostatica p si calcola osservando che lo spigolo deformato diventa di lunghezza $l - \Delta l$, cioè di lunghezza $1 + \varepsilon$. Il volume deformato $V - \Delta V$ vale quindi:

$$\begin{aligned} V - \Delta V &= (l - \Delta l)^3 = (1 + \varepsilon)^3 = 1 + 3 \times 1 \times \varepsilon^2 + 3 \times 1^2 \times \varepsilon + \varepsilon^3 \approx \\ 1 + 3\varepsilon &\Rightarrow \Delta V = -3\varepsilon \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -3\varepsilon \end{aligned} \quad (4.15)$$

dove nella (4.15) si sono effettuate approssimazioni basate sul fatto che $\Delta l/l$ è piccolo rispetto all'unità, e che quindi i termini contenenti Δl elevato a potenze superiori all'unità sono trascurabili rispetto al termine contenente Δl . In altre parole, si sono trascurati i termini infinitesimi di ordine superiore.

Si calcola ora il valore di ε tramite la legge di Hooke. Ricordando che $\sigma = -p$, ed attribuendo gli indici 1, 2, 3 alle tre direzioni ortogonali perpendicolari alle tre facce del cubo, ε_1 vale:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu) \quad (4.16)$$

dove la deformazione ε_1 è negativa quando la pressione idrostatica p imposta è positiva.

La stessa espressione trovata per ε_1 vale anche per ε_2 od ε_3 , per cui si impiega nel seguito semplicemente il simbolo ε ad indicare la deformazione di un generico lato. Si ottiene infine l'espressione cercata di K in funzione di E e di ν :

$$K = \frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = -\frac{p}{3\varepsilon} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (4.17)$$

Il significato fisico delle approssimazioni introdotte nella (4.15) può essere chiarito graficamente. Si consideri la Figura 4.2 (a), che descrive un cubo indeformato di lato unitario, per cui il volume iniziale V vale 1. Si supponga poi che ogni lato del cubo aumenti in lunghezza di Δl , Figura (b), per cui il volume finale abbraccia totalmente il volume iniziale, e ΔV è la differenza tra i due volumi. (Graficamente risulta molto più chiaro indagare un aumento di volume, e non una diminuzione.) Una buona approssimazione della variazione di volume ΔV è costituita dalle tre

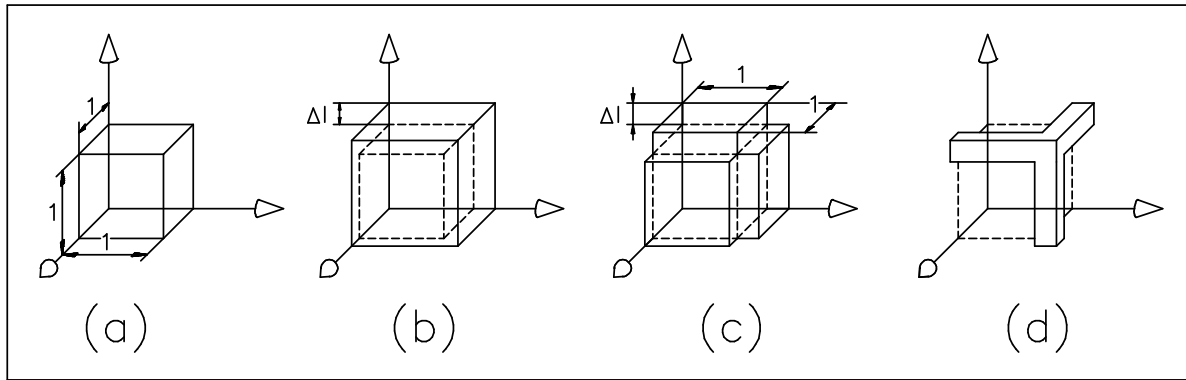


Figura 4.2

sporgenze a forma di parallelepipedo, sporgenze che si appoggiano alle tre facce del cubo indeformato, Figura (c) , ed i cui tre lati sono di lunghezza 1 , 1 , e Δl . Il volume di ogni sporgenza vale quindi $1 \times 1 \times \Delta l = \Delta l$, per cui la variazione relativa di volume, $\Delta V/V$, vale approssimativamente $3 \Delta l$, come già trovato nella formula (4.15) . In conclusione, gli infinitesimi di ordine superiore tralasciati nello sviluppo della formula (4.15) corrispondono alle differenze tra il volume deformato della Figura 4.2 (c) e della Figura (b) , dove tale volume tralasciato è rappresentato in Figura 4.2 (d) , accostato al cubo unitario iniziale.

Si osserva che K descrive probabilmente meglio di ν la comprimibilità cubica del materiale. Infatti per un elastomero, scarsamente comprimibile, un valore realistico di ν è 0.4999 , molto vicino al valore di incomprimibilità 0.5 , e quindi poco adatto ad esprimere intuitivamente la distanza dall'incomprimibilità. Invece K diventa infinito per materiali incomprimibili, ma rimane finito per un elastomero reale comprimibile, e molto più vicino al valore di K per gli acciai di quanto non lo sia E . Per un elastomero un valore realistico di E è 3 MPa (tipo gomma da cancellare), per cui:

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} = \frac{3}{3(1 - 2 \times 0.4999)} = 5000 \text{ MPa} \quad (4.18)$$

Per un acciaio K vale invece:

$$K = \frac{210000}{3(1 - 2 \times 0.3)} = 175000 \text{ MPa} \quad (4.19)$$

e quindi il K dell'acciaio è "soltanto" 35 volte maggiore di quello della gomma, mentre l' E dell'acciaio (210'000 MPa) è ben 70'000 volte maggiore dell' E della gomma (3 MPa) .

5 Riassunto del problema elastico

Il problema elastico può essere così riassunto : le incognite sono i tre spostamenti u , v , w , le sei deformazioni ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , e le sei tensioni σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , per un totale di quindici incognite. Le equazioni disponibili per bilanciare le quindici incognite sono le sei equazioni cinematiche di collegamento tra spostamenti e deformazioni (2.1) , le tre equazioni di equilibrio alla traslazione (3.1) , e le sei equazioni di Hooke (4.1) .

Teoria



dell'elasticità

6 Significato fisico degli stati di tensione e di deformazione piana

Un componente meccanico è soggetto in genere ad uno stato di tensione triassiale. Se però il corpo possiede una forma particolare, può lavorare od avvicinarsi ad uno stato di tensione o di deformazione piana. In questi casi il corpo tridimensionale può venire studiato come piano, facilitando di molto, rispetto ad un approccio tridimensionale, analisi sperimentali fotoelastiche e studi numerici agli elementi finiti.

In questo Paragrafo si presentano vari esempi che illustrano fisicamente l'insorgere degli stati piani di tensione e di deformazione. Si esaminano infine alcuni controesempi, come stimolo ad un approccio critico a queste approssimazioni.

Da un punto di vista **matematico** un corpo piano è soggetto ad uno stato piano di tensione quando, assumendo come asse z quello perpendicolare alla faccia del corpo piano, $\sigma_z = 0$ e $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ per tutti i punti del corpo. Un corpo piano si trova invece in uno stato piano di deformazione quando $\epsilon_z = 0$ e $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ per tutti i punti del corpo. (Si sarebbe potuto scrivere queste condizioni anche nella forma $\epsilon_z = 0$ e $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, dato che τ si annulla soltanto quando γ si annulla e viceversa. Per lo stato di deformazione piana, le condizioni sono normalmente formulate sulle deformazioni, mentre per la tensione piana le condizioni vengono poste sulle tensioni.)

Si discutono nel seguito le condizioni **fisiche**, più che matematiche, per cui in un corpo tridimensionale si sviluppa uno stato piano di tensione o di deformazione. Innanzitutto, perché un corpo tridimensionale possa lavorare in stato piano di tensione o di deformazione è necessario, ma non sufficiente, che esista una direzione, normalmente indicata dall'asse z , tale che sezioni del corpo perpendicolari all'asse z siano tutte geometricamente uguali tra loro, e caricate nella stessa maniera. Per esempio, un tubo rettilineo soggetto a pressione interna possiede questa proprietà, dove l'asse z è l'asse del tubo. Le sezioni perpendicolari a z sono tutte geometricamente uguali, ed ugualmente caricate. Anche un dente di una ruota dentata cilindrica a denti diritti possiede tali proprietà, se si assume che il dente sia caricato sul fianco lungo una linea parallela all'asse della ruota dentata in modo uniforme, fatto rigorosamente non vero. Assumendo come asse z l'asse della ruota dentata, tutte le sezioni perpendicolari a z sono uguali, e caricate ugualmente (o quasi).

Si può accettare l'approssimazione di tensione o deformazione piana anche quando la geometria ed il caricamento variano gradualmente lungo l'asse z . (Questo è appunto il caso della ruota dentata, dove il caricamento varia gradualmente in direzione z .)

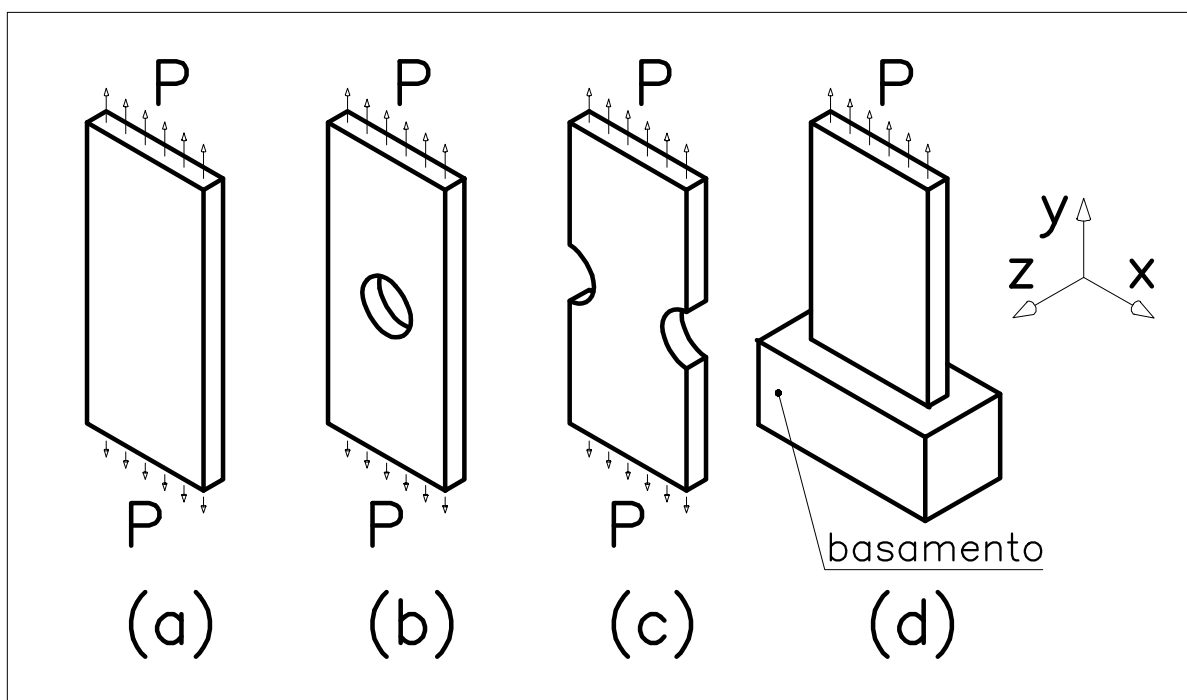


Figura 6.1

Si è visto che la condizione di sezioni geometricamente uguali ed ugualmente caricate è necessaria per l'instaurarsi di uno stato piano di tensione o di deformazione, ma non è sufficiente a garantire l'insorgere di stati piani. Si discutono nel seguito le condizioni aggiuntive normalmente richieste per l'instaurarsi di stati piani di tensione o di deformazione.

Le condizioni aggiuntive (rispetto all'esistenza dell'asse z ed alla proprietà che sezioni dell'asse z ad esso normale siano geometricamente uguali ed ugualmente caricate) opportune (ma non strettamente necessarie, come i controesempi chiariranno) perché si instauri nel corpo uno **stato piano di tensione**, sono che lo spessore del corpo in direzione z sia piccolo, e che il caricamento giaccia nel piano $x - y$. Se il corpo è vincolato oltre che caricato, come spesso accade, occorre che le reazioni vincolari agiscano nel piano $x - y$ e non in direzione z .

In Figura 6.1 sono rappresentati vari corpi di piccolo spessore in direzione z . Le sezioni perpendicolari alla direzione z sono geometricamente uguali ed ugualmente caricate nel loro piano. Tali corpi soddisfano quindi la condizione necessaria perché possa esistere uno stato piano di tensione o di deformazione. In particolare, i corpi (a), (b) e (c) sono soggetti ad uno stato piano di tensione. Infatti le tensioni σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle su tutti i punti delle due facce del corpo. Siccome lo spessore del corpo è piccolo, le tensioni non riescono a variare molto lungo lo spessore, e quindi si può ragionevolmente ritenere che tali tensioni rimangano trascurabili anche per i punti interni del corpo. Si considera ora

il corpo (d) , dove la lastra è ancorata ad un basamento supposto rigido. Siccome il basamento è indeformabile, lo spessore della lastra in direzione z non può variare in prossimità del collegamento col basamento. Nascono allora necessariamente nella lastra, in vicinanza del collegamento col basamento, tensioni σ_z che impediscono allo spessore di diminuire, e cioè tensioni σ_z trattive. Tali carichi agiscono in direzioni che non stanno sul piano $x - y$. Di conseguenza lo stato tensionale della lastra non può essere di tensione piana, almeno in vicinanza dell'incastro col basamento, mentre diventerà gradualmente di tensione piana ad una certa distanza, dell'ordine di grandezza dello spessore della lastra, dal basamento stesso.

Si discutono nel seguito le condizioni aggiuntive (rispetto all'esistenza dell'asse z ed alla proprietà che sezioni dell'asse z ad esso normale siano geometricamente eguali ed ugualmente caricate) opportune (ma non strettamente necessarie, come i controesempi chiariranno) perché si instauri nel corpo uno **stato piano di deformazione**. Perché nel corpo nasca uno stato piano di deformazione, è opportuno che il suo spessore in direzione z sia grosso, e che il carico giaccia nel piano $x - y$. L'instaurarsi di uno stato piano di deformazione è facilitato quando lo stato tensionale nel piano $x - y$ è fortemente disuniforme, cioè alcune zone sono sottocaricate rispetto ad altre, come gli esempi riportati chiariranno.

In Figura 6.2 (a) è rappresentato un corpo di grosso spessore in direzione z rispetto al riferimento cartesiano riportato in Figura, e precisamente un cilindro deformabile schiacciato tra due piani assunti rigidi. Il contatto tra cilindro e piani è ritenuto senza attrito per semplicità. Questo è un caso di contatto Hertiziano.

Le sezioni perpendicolari a z del cilindro sono tutte geometricamente uguali tra loro, Figura 6.2 (b) e (c) . Si può anche fisicamente ritenere che la pressione di contatto rimanga abbastanza uniforme in direzione z . Questo corpo soddisfa quindi le condizioni necessarie per essere in stato piano di tensione o di deformazione. Si mostra nel seguito che il cilindro è soggetto prevalentemente ad uno stato piano di deformazione. Per meglio comprendere le considerazioni sulle deformazioni del cilindro, è opportuno pensare che il cilindro si fatto di gomma. La zona centrale della sezione perpendicolare a z del cilindro risulta sottocaricata rispetto alle porzioni di cilindro vicine al contatto, Figura 6.2 (d) . La zona sottotensionata si

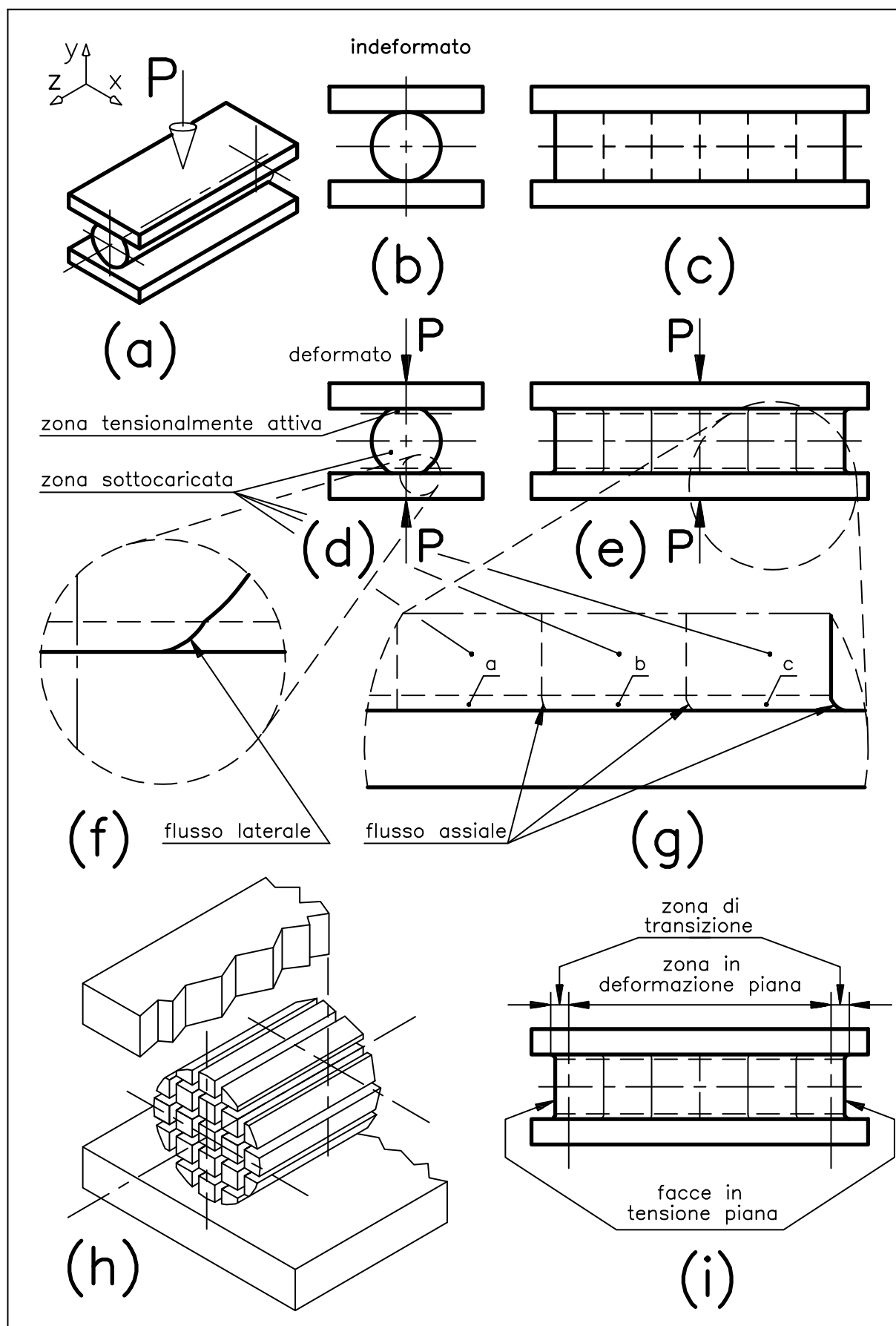


Figura 6.2

deforma quindi poco, e trattiene le zone ad essa adiacenti, tensionalmente attive, in tutte le direzioni e quindi anche nelle direzioni laterale x (Figura 6.2 (f)) ed assiale z (Figura 6.2 (g)). La vista laterale del cilindro indeformato, Figura 6.2 (c), è stata corredata da linee ideali equidistanziate disegnate sulla superficie cilindrica e giacenti sul piano $x - y$. In seguito alla compressione del cilindro, tali linee non si deformano nella zona centrale del cilindro, sottocaricata, Figura 6.2 (g). In particolare, il cilindro non si allunga sensibilmente nella sua zona centrale. Invece, nelle zone del cilindro a contatto coi piani rigidi, assai caricate, le linee si deformano a rappresentare un flusso assiale del materiale, presente insieme ad un flusso laterale del materiale, entrambi causati dallo schiacciamento del materiale in direzione y . Questo flusso è collegato al fatto che, schiacciando una colonna di materiale, essa tende ad allargare la sua sezione trasversale. Alternativamente, un elastico tirato riduce la sua sezione trasversale. Questi allargamenti e contrazioni laterali rispetto alla direzione del carico o dell'allungamento imposto si chiamano in gergo "effetto Poisson", dato che sono quantificati da ν . In particolare, per $\nu = 0$, non compaiono strizioni o allargamenti laterali.

Ritornando al cilindro di Figura 6.2, in seguito ai flussi del materiale dovuti all'effetto Poisson, le sezioni del cilindro perpendicolari all'asse z si ingobbano. Come visibile nell'ingrandimento della Figura 6.2 (g), il flusso assiale incurva le linee ideali in modo più marcato tanto più ci si discosta dalla mezzeria. La linea ideale in mezzeria del cilindro rimane rettilinea per ragioni di simmetria. Poi il blocco a di materiale, in seguito alla sua compressione, spinge assialmente i blocchi b e c . Il blocco b spinge a sua volta il blocco c , procurando al bordo destro del blocco c una deformazione maggiore di quella del bordo destro del blocco a . Tuttavia questo flusso assiale del materiale risulta frenato da due fattori: 1) il materiale del cilindro che fluisce assialmente è a contatto col materiale della zona centrale del cilindro, sottocaricata e quindi di fatto indeformata, la quale trattiene dai moti assiali il materiale deformato; 2) il corpo è di lunghezza assiale considerevole, per cui i blocchi a , b , c di Figura 6.2 (g) tendono a provocare deformazioni crescenti quanto più ci si allontana assialmente dalla mezzeria, deformazioni fisicamente inaccettabili. Per comprendere meglio la genesi di questo effetto di freno all'ingobbarsi eccessivo delle sezioni del cilindro, si esamini la Figura 6.2 (h), nella quale il cilindro è stato tagliato lungo piani ideali, in modo che esso risulti idealmente costituito da tanti elementi a sezione piccolissima ed ad elevato sviluppo assiale, come in un trefolo di una fune. Questi tagli ideali

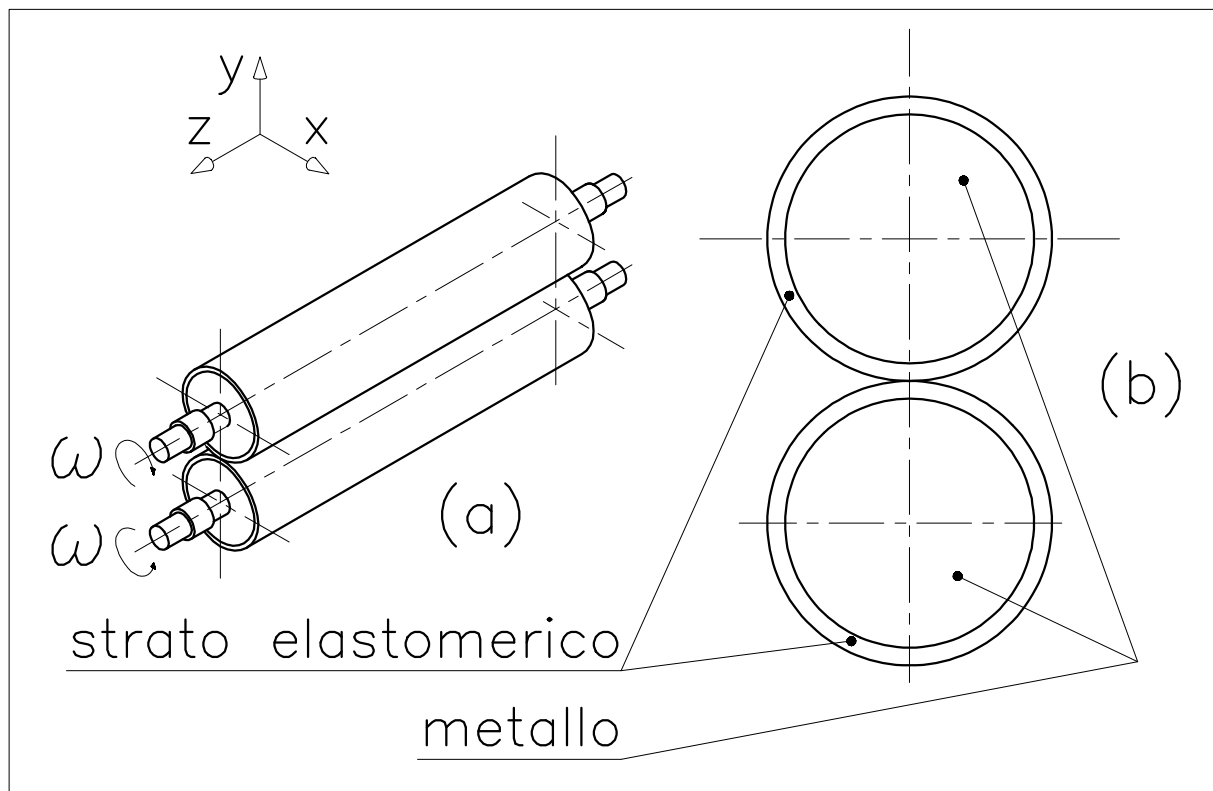


Figura 6.3

rimuovono le tensioni τ , almeno supponendo senza attrito il contatto tra i vari elementi allungati, e quindi eliminano di fatto la capacità frenante di flussi in sensi assiale del materiale. In un cilindro come quello di Figura 6.2 (h), l'ingobbarsi delle sezioni perpendicolari all'asse z è certamente maggiore di quello in un analogo cilindro continuo.

Si conclude che il flusso assiale è certamente presente, ma in misura trascurabile nel cilindro schiacciato tra due piani, e che quindi l'assunzione che la deformazione assiale sia nulla, cioè che lo stato sia di deformazione piana nella zona centrale del cilindro, Figura 6.2 (i), è accettabile. Esistono poi due zone di transizione tra deformazione piana e tensione piana alle estremità del cilindro. Purtroppo non si può essere sicuri che in tali zone di transizione tra deformazione e tensione piana, le tensioni siano intermedie tra quelle calcolate per questi due stati estremi. Infine, le facce frontali del cilindro, dove le tensioni σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle in tutti i punti delle facce, sono in tensione piana. Se si vuole calcolare il legame tra schiacciamento del cilindro e carico P applicato, l'ipotesi di deformazione piana è la più vicina alla realtà, perché la maggior parte del cilindro lavora in deformazione piana.

Si vede quindi che i fattori che aiutano il formarsi di uno stato piano di deformazione sono due: la presenza di zone sottocaricate adiacenti alle zone altamente caricate, che frenano i flussi assiali del materiale; la notevole lunghezza assiale del corpo che, qualora si ammettesse

l'insorgere di un flusso assiale del materiale, provocherebbe distorsioni fisicamente inaccettabili specie nelle zone lontane dalla mezzeria.

In Figura 6.3 è rappresentato un secondo esempio di contatto Hertziano, quello di due rulli metallici ricoperti in gomma, impiegati nelle fotocopiatrici per il trasporto dei fogli di carta. Il sottile strato elastomerico si comporta come lo strato tensionalmente attivo di Figura 6.2 (d) ed (e) . A causa del trattenimento assiale (in direzione z) esercitato sullo strato elastomerico dall'anima metallica, virtualmente indeformabile, nasce nell'elastomero uno stato di deformazione piana, almeno lontano dalle facce frontali dei cilindri. In un articolo dal titolo: *Indentation of a viscoelastic rubber covered roll by a rigid plane surface*, si legge: *It was also assumed that plane strain state of deformation prevailed . . .*

In Figura 6.4 (a) è rappresentato un altro esempio di corpo di grosso spessore in direzione z rispetto al riferimento cartesiano riportato in Figura, e precisamente una mensola deformabile inflessa da una distribuzione di forza lineare uniforme applicata lungo l'estremità della mensola. Le sezioni perpendicolari a z della mensola sono tutte geometricamente uguali tra loro ed ugualmente caricate, Figura 6.4 (b) e (c) . La mensola soddisfa quindi le condizioni necessarie per lavorare in stato piano di tensione o di deformazione. Si mostra nel seguito che la mensola è soggetta prevalentemente ad uno stato piano di deformazione. Infatti il materiale a cui la mensola è incastrata risulta sottocaricato rispetto alla mensola ed alle zone dell'incastro in prossimità dell'incastro stesso, Figura 6.4 (d) . In Figura 6.5 è mostrato un semplice esperimento riguardante una mensola realizzata in materiale molto deformabile, su cui è stata disegnata una quadrettatura, da cui appare che le zone dell'incastro appena lontane dalla mensola rimangono virtualmente indeformate. La zona sottotensionata si deforma quindi poco, e trattiene le zone ad essa adiacenti, tensionalmente maggiormente attive, in tutte le direzioni e quindi anche nella direzione assiale z (Figura 6.4 (d)). Questo trattenimento assiale esercitato dall'incastro favorisce l'instaurarsi di uno stato piano di deformazione della zona della mensola in vicinanza dell'incastro, ma tale effetto di trattenimento assiale non può arrivare ad esercitarsi sulle zone della mensola troppo lontane dall'incastro. Tuttavia anche queste zone lavorano prevalentemente in deformazione piana, in seguito all'effetto di ostacolo relativo all'ingobbarsi delle sezioni della mensola sul piano $x - y$. Per evidenziare questi ingobbamenti, la superficie frontale della mensola indeformata è stata corredata da linee ideali equidistanziate , Figura 6.4 (c)

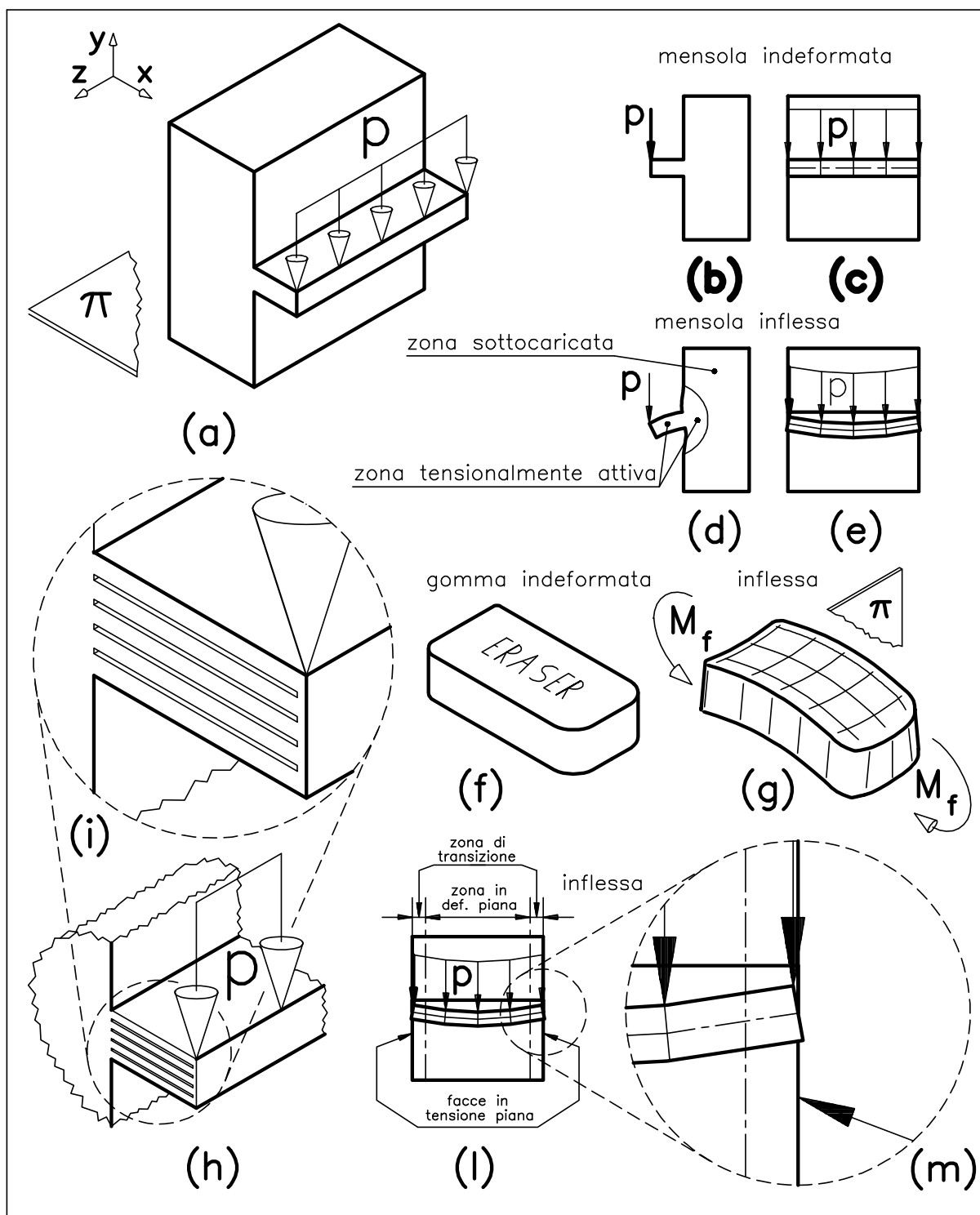


Figura 6.4

, disegnate in direzione y . In seguito all'inflessione della mensola, Figura 6.4 (d), fibre della mensola in direzione x e giacenti sulla faccia superiore della mensola sono soggette a tensioni di trazione, mentre le analoghe fibre sulla faccia inferiore sono compresse in direzione x . Le fibre sulla faccia superiore tendono quindi a contrarre la loro sezione trasversale, nella stessa maniera in cui un elastico tirato rimpicciolisce la sua sezione.

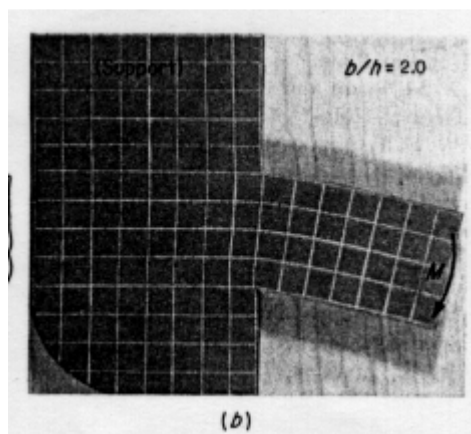


Figura 6.5

si deforma più o meno come la mensola di Figura 6.4 (a) , tranne che per il fatto che la mensola non si arcua in vicinanza dell'incastro che, sottocaricato, impedisce alla mensola tali inflessioni. Se la mensola è abbastanza lunga in direzione z , cioè è in grosso spessore, le rotazioni delle linee ideali in direzione y disegnate sulla superficie frontale del dente, Figura 6.4 (c) ed (e) , producono ingobbamenti crescenti quanto più ci si allontana assialmente dalla mezzeria della mensola, deformazioni che si ostacolano a vicenda, con un meccanismo già indagato in relazione al cilindro compresso di Figura 6.2 (g) . Queste rotazioni sono infatti certamente minori di quelle che si verificherebbero in una mensola simile, ma idealmente sezionata con tagli lungo piani $x - z$, Figura 6.4 (h) ed (i) , tagli che annullano le tensioni τ_{yz} , facilitando il flusso laterale del materiale. In conclusione, la faccia superiore della mensola tende a diminuire il suo spessore in direzione z , mentre la faccia inferiore tende ad aumentare il suo spessore in direzione z . Il piano medio π della mensola, mostrato indeformato nella Figura 6.4 (a) , contiene invece punti che non fluiscono lateralmente, dato che giacciono sull'asse neutro, e quindi sono scarichi, cioè indeformati. I flussi laterali in direzione z delle zone sopra e sotto il piano π si ostacolano a vicenda specie se lo spessore in direzione z della mensola è abbastanza grosso, e quindi la zona centrale della mensola, Figura 6.4 (l) , lavora in deformazione piana, le facce laterali della mensola lavorano in tensione piana, ed esiste una zona di transizione tra deformazione e tensione piana, Figura 6.4 (l) ed (m) .

Se si vuole calcolare il legame tra inflessione della mensola e carico lineare p applicato, l'ipotesi di deformazione piana è la più vicina alla realtà, perché la maggior parte della mensola lavora in deformazione piana.

Si sviluppa nel seguito un paragone tra la freccia in una mensola lavorante in deformazione piana (cioè in grosso spessore, dove lo spessore indica la larghezza della trave) e la freccia in una mensola lavorante in tensione piana (cioè in piccolo spessore, dove lo spessore indica la

larghezza della trave). Se si indica con σ_x la tensione flessionale, in direzione x , agente sulla faccia superiore della mensola (e quindi trattiva) ad una certa distanza dal carico, la corrispondente deformazione ϵ_x si calcola tramite la legge di Hooke. Se si suppone che la mensola lavori in tensione piana, la tensione assiale σ_z è nulla, ed inoltre la σ_y è nulla perché la direzione y è perpendicolare alla faccia superiore della mensola, faccia libera. Quindi la deformazione ϵ_x vale:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} \quad (6.1)$$

Se invece la mensola lavora in stato piano di deformazione, la deformazione ϵ_z si annulla, e quindi:

$$\begin{aligned} \epsilon_z = 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \Rightarrow \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \nu\sigma_x \Rightarrow \\ \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\nu\sigma_x)] = \frac{(1 - \nu^2)}{E} \sigma_x \end{aligned} \quad (6.2)$$

Paragonando la (6.1) e la (6.2), ne viene che, a parità di carico imposto, la deformazione in una mensola in deformazione piana vale $(1 - \nu^2)$ volte la deformazione in una mensola lavorante in tensione piana. In altre parole, la deformazione in una mensola lavorante in deformazione piana è minore di quella in una mensola lavorante in tensione piana, e quindi la mensola in deformazione piana è meno flessibile, dato che la freccia è proporzionale alla deformazione. Viceversa, se si impone un abbassamento uniforme all'estremità caricata della mensola, la forza lineare di reazione della mensola è maggiore al centro, dove lo stato è di deformazione piana, e minore alle estremità, dove lo stato è di tensione piana. La diminuzione della forza di reazione varia come $(1 - \nu^2)$, cioè il calo per $\nu = 0.3$ è di circa il 10 %.

La stessa diminuzione di pressione vale anche per un contatto tra cilindro deformabile e piani rigidi, Figura 6.2. Questo risultato è stato ottenuto tramite la teoria Hertziana. In un testo di Meccanica dei Contatti si legge: *Real cylinders are of finite length and, although the contact stresses over the majority of the length of the cylinder are predicted accurately by the Hertz theory, significant deviations occur close to the ends. . . . On cross-sections away from the ends an axial compression stress $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ exists to maintain the condition of plane strain. At the free ends this*

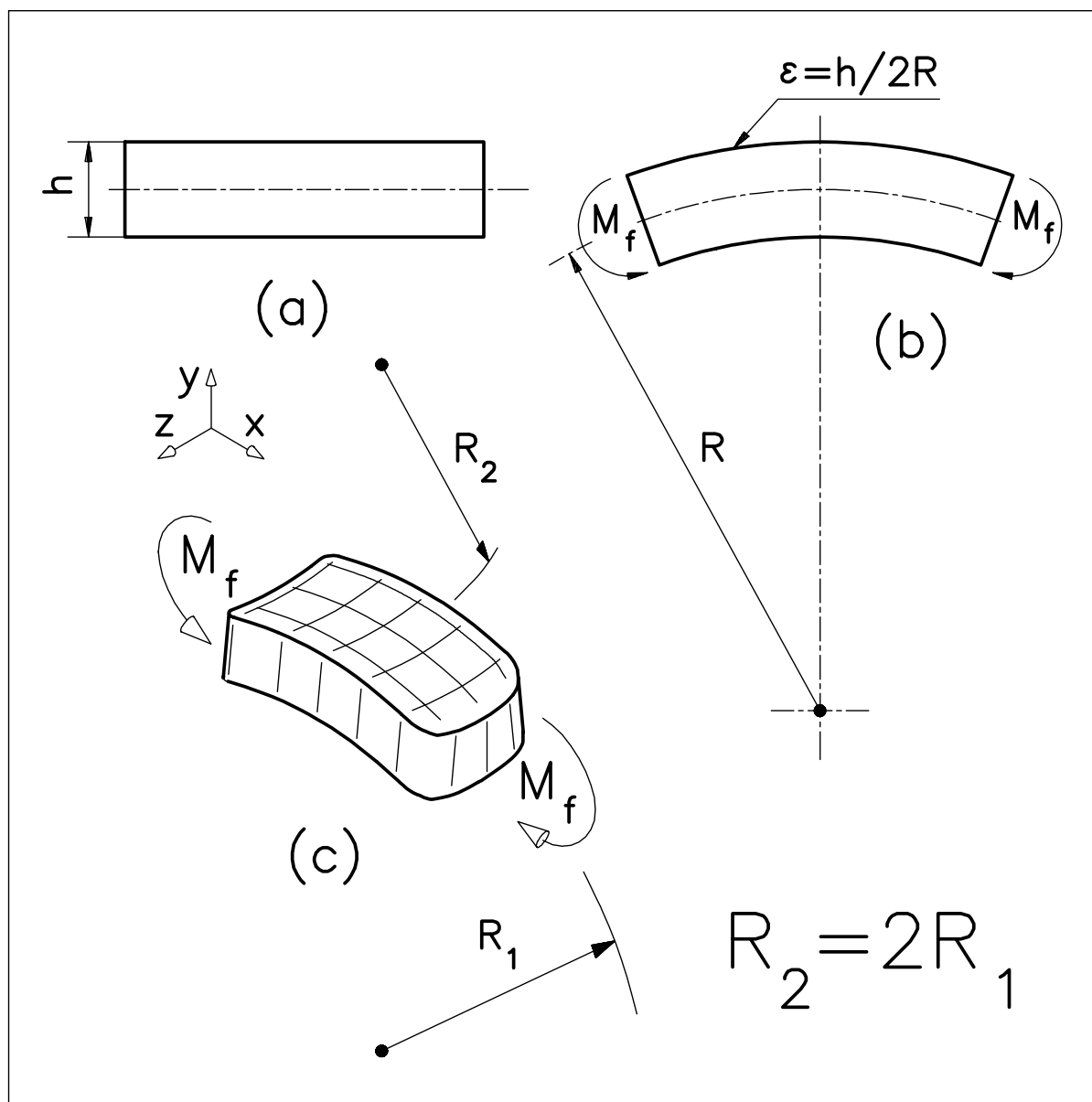


Figura 6.6

compression stress is relaxed, permitting the solids to expand slightly in the axial direction and thereby reducing the contact pressure at the end. An estimate of the reduction in pressure at the end may be obtained by assuming that the end of the cylinder is in a state of plate stress. . . The pressure at the ends [is about] $(1-\nu^2)$ [times the pressure in the cylinder central zone].

Si noti però che, se cilindro e piani sono entrambi deformabili, la pressione di contatto diventa matematicamente infinita alle estremità del contatto, similmente a quanto avviene nell'indentazione di un semipiano con un penetratore rettangolare.

Si riconsidera nel seguito la deformazione flessionale della gomma da cancellare di Figura 6.4 (f) , rappresentata in maggiore dettaglio in

Figura 6.6 . Se si inflette una trave, Figura (a) , la deformazione ε delle fibre circonferenziali alla faccia superiore vale $h/(2R)$, dove h è lo spessore della trave, ed R il raggio di curvatura della fibra media. Tale formula si deriva da considerazioni geometriche simili a quelle che hanno condotto alla formula della deformazione circonferenziale in un corpo assialsimmetrico, vedi la formula 2.2 del Paragrafo 2 di questo stesso Capitolo. Si considera ora la gomma da cancellare, e si vuole trovare il legame tra il raggio di curvatura R_1 ed il raggio di curvatura R_2 . La deformazione $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$ delle fibre in direzione x , dovuta al momento flettente M_f , vale $h/(2R_1)$.

La deformazione nella direzione z , perpendicolare ad x , dipende dal grado di impedimento all'ingobbamento delle sezioni sul piano $y - z$ della gomma da cancellare. Se si ritiene che tale impedimento venga a mancare, perché si immagina la gomma idealmente formata da un trefolo come in Figura 6.2 (h) , ciò significa che esiste soltanto la tensione σ_x , mentre le tensioni σ_y e σ_z sono nulle. Di conseguenza, la tensione σ_x e la deformazione ε_x sono legate dalla legge di Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{h}{2 R_1} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{\sigma_x}{E} \quad (6.3)$$

Le sezioni trasversali delle fibre in direzione x si contraggono di una quantità calcolabile tramite la legge di Hooke, supponendo nulle le tensioni σ nelle direzioni y e z . In particolare, ε_z vale:

$$\varepsilon_z = \frac{h}{2 R_2} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\nu \frac{\sigma_x}{E} = -\nu \frac{h}{2 R_1} \Rightarrow \quad (6.4)$$

$$R_2 = \frac{R_1}{\nu} \approx 2 R_1$$

dove il valore $\nu = 0.5$ è tipico dei materiali elastomerici, virtualmente incomprimibili. Se dunque non vi fossero ostacoli agli ingobbamenti delle sezioni sul piano $y - z$, si dovrebbe avere che R_2 è il doppio di R_1 . Ci si convince immediatamente che R_2 è maggiore di $2 R_1$, per cui già con uno spessore della gomma da cancellare in direzione z non enorme, la gomma non lavora in tensione piana in direzione z , ma in una situazione intermedia tra tensione e deformazione piana. Con spessori più elevati

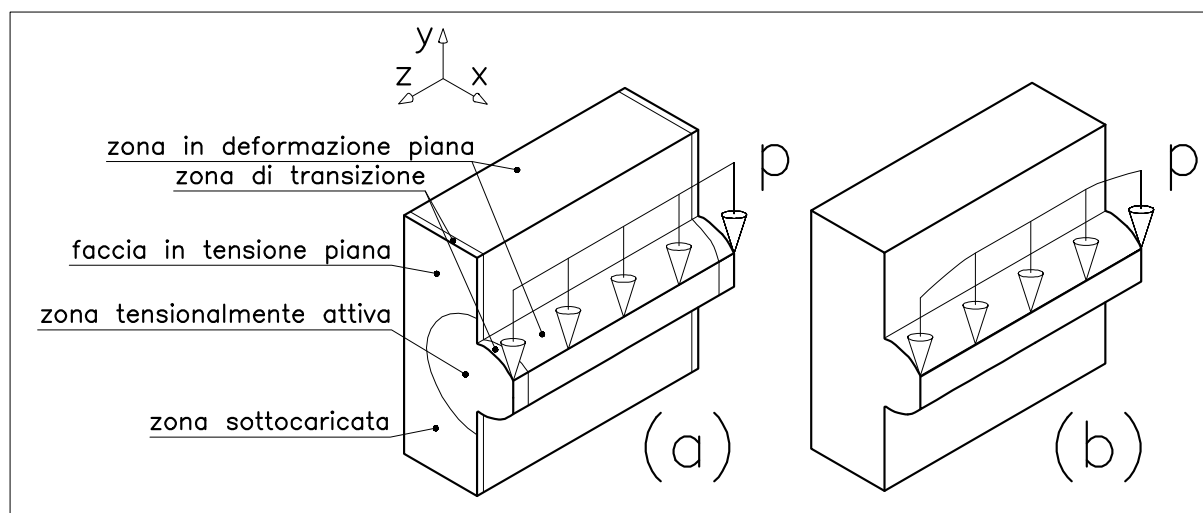


Figura 6.7

della gomma in direzione z , la parte centrale della gomma lavorerebbe in deformazione piana.

Si considera nel seguito un dente di una ruota dentata cilindrica a denti dritti di notevole estensione in direzione z , Figura 6.7 (a), caso analogo alla mensola di Figura 6.4. In particolare, si distinguono nel dente una zona centrale in deformazione piana, le facce laterali in tensione piana, ed una zona di transizione. Anche per il dente, la zona dell'incastro lontana dal dente è virtualmente scarica, e quindi poco deformata. Di conseguenza, tale zona sottocaricata trattiene assialmente il dente, facilitando l'instaurarsi di uno stato di deformazione piana, insieme al fatto che gli ingobbamenti si ostacolano mutuamente. La zona di transizione è verosimilmente più ampia nelle parti del dente lontane dall'incastro, dato che in queste parti l'effetto di trattenimento assiale esercitato dall'incastro diventa meno sensibile.

Ritornando alla mensola in grosso spessore in direzione z di Figura 6.4, si vuole esaminare l'inflessione della mensola quando il carico è lineare uniforme in direzione z . Una considerazione conduce a ritenere che la parte centrale della mensola si infletta maggiormente, mentre una seconda considerazione è a favore di conclusioni opposte. La deformata a sella dovuta all'effetto Poisson suggerisce che la zona centrale della mensola si abbassi maggiormente; il fatto che le zone laterali della mensola lavorino più vicine ad uno stato di tensione piana, stato in cui la mensola è più flessibile, suggerisce che le zone laterali della mensola si inflettono maggiormente.

Non è chiaro quale dei due effetti prevalga per una geometria generica. Per il dente di un ingranaggio, che si può interpretare come un tipo particolare di mensola, studi agli elementi finiti indicano che le zone

lateralali del dente risultano più flessibili. Più precisamente, se si impone alla testa di un dente di grosso spessore in direzione z un abbassamento uniforme, come in pratica capita quando il dente della ruota dentata motrice ingrana con un dente della ruota dentata condotta, la pressione di contatto che si genera è influenzata sia dalla cedevolezza flessionale della mensola che dalla deformabilità collegata al problema di contatto Hertziano di rullo contro rullo. Come si è visto, entrambe queste componenti indicano che la pressione di contatto scende alle estremità del contatto come $(1-\nu^2)$, cioè cala per $\nu = 0.3$ di circa il 10 %, un risultato confermato da analisi numeriche agli elementi finiti. La Figura 6.7 (b) illustra appunto questo calo della forza lineare di contatto alle estremità del dente inflesso con una freccia costante.

Si esamina nel seguito uno spinotto automobilistico soggetto alla pressione di ovalizzazione, Figura 6.8, vedi il Capitolo sugli organi di manovellismo. La Figura 6.8 (a) presenta uno spinotto caricato dalla pressione di ovalizzazione. La Figura (b) mostra lo spinotto ovalizzato, con la sezione circolare che si è deformata in una sezione di tipo ellittico con asse maggiore orizzontale. Tale schiacciamento dello spinotto produce tensioni circonferenziali trattive (positive) dove le fibre si allungano, e tensioni compressive dove le fibre si accorciano. Con riferimento alla Figura (c) Tensioni circonferenziali positive nascono nei punti B, C, F, G , mentre tensioni negative cadono nei punti A, D, E, H . La Figura (d) mostra invece l'effetto Poisson (non evidenziato nella Figura (c) per evitare confusioni), cioè le dilatazioni e contrazioni assiali (in direzione z) causate rispettivamente dagli schiacciamenti e dagli allungamenti delle fibre circonferenziali. Per esempio, nel punto A della Figura (c) la fibra circonferenziale si accorcia. Infatti nell'intorno del punto A la sezione trasversale dello spinotto, vista come anello e quindi come trave curva, con lo schiacciamento dello spinotto tende a raddrizzarsi, e quindi le fibre esterne vicino ad A devono accorciarsi. Nascono quindi in A tensioni circonferenziali compressive, le quali tendono ad allargare la sezione trasversale delle fibre, provocando un allungamento assiale dello spinotto nell'intorno del punto A , allungamento rappresentato in Figura (d). Sempre con riferimento alla Figura (d), nei punti A, D, E, H lo spinotto si allunga assialmente, mentre nei punti B, C, F, G lo spinotto si accorcia assialmente. Vi sono poi quattro zone di transizione tra quelle di allungamento e di accorciamento, che non si allungano né si accorciano.

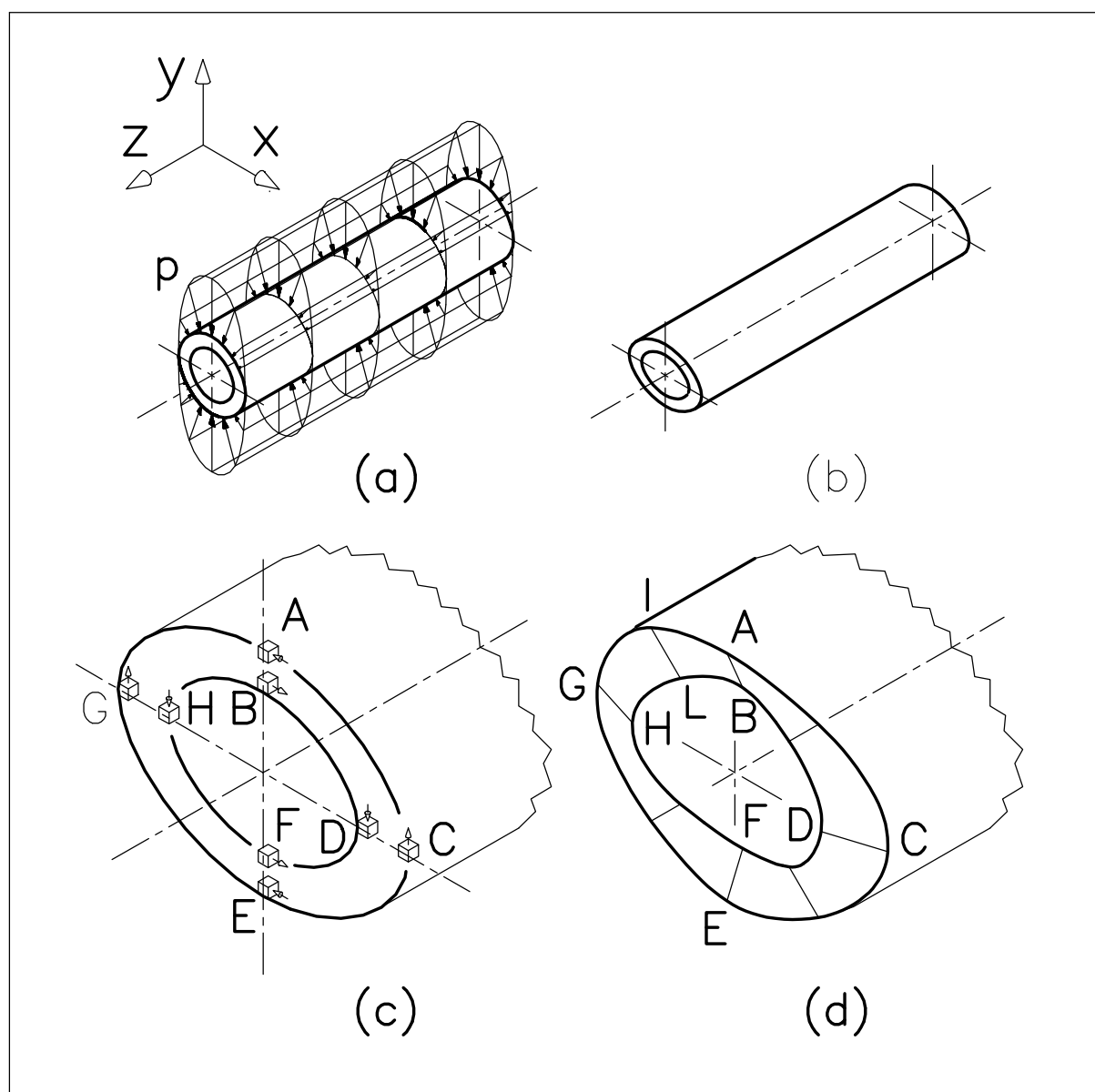


Figura 6.8

In Figura (d) , la zona compresa tra i punti *I* ed *L* (e le altre tre zone di transizione, non indicate con lettere in Figura (d)) rimane assialmente indeformata. Ne segue che le varie sezioni dello spinotto, tranne la sezione in mezzeria, tendono ad ingobbarsi, ma questi ingobbamenti, diventando sempre maggiori allontanandosi dalla mezzeria dello spinotto, si ostacolano a vicenda, favorendo l'instaurarsi della deformazione piana nello spinotto.

Si riportano alcune frasi sull'argomento di tensione e deformazione piana estratte da un testo autorevole di Teoria dell'Elasticità: *If a thin plate is loaded by forces applied at the boundary, parallel to the plane of the plate and distributed uniformly over the thickness . . . the state of stress is called plane stress. If a long cylindrical or prismatic body is loaded by*

forces that are perpendicular to the longitudinal elements and do not vary along the length, [it undergoes a plane strain condition].

Si considerano nel seguito alcuni **controesempi**, cioè componenti meccanici in spessore sottile che non sono totalmente in stato di tensione piana, e corpi in grosso spessore che non sono interamente in stato di deformazione piana.

Si considera dapprima il caso di **corpi in piccolo spessore, che però non lavorano totalmente in stato piano di tensione**. La Figura 6.9 presenta una selezione di esempi. La Figura 6.9.(a) mostra una lastra doppiamente intagliata in piccolo spessore in direzione z , e dove i raggi degli intagli sono paragonabili allo spessore in direzione z della lastra. A causa della limitatezza del raggio di intaglio, nascono in prossimità degli intagli dei gradienti di tensione molto elevati, per cui le zone tensionalmente attive si trovano a ridosso di quelle sottocaricate. Tali zone

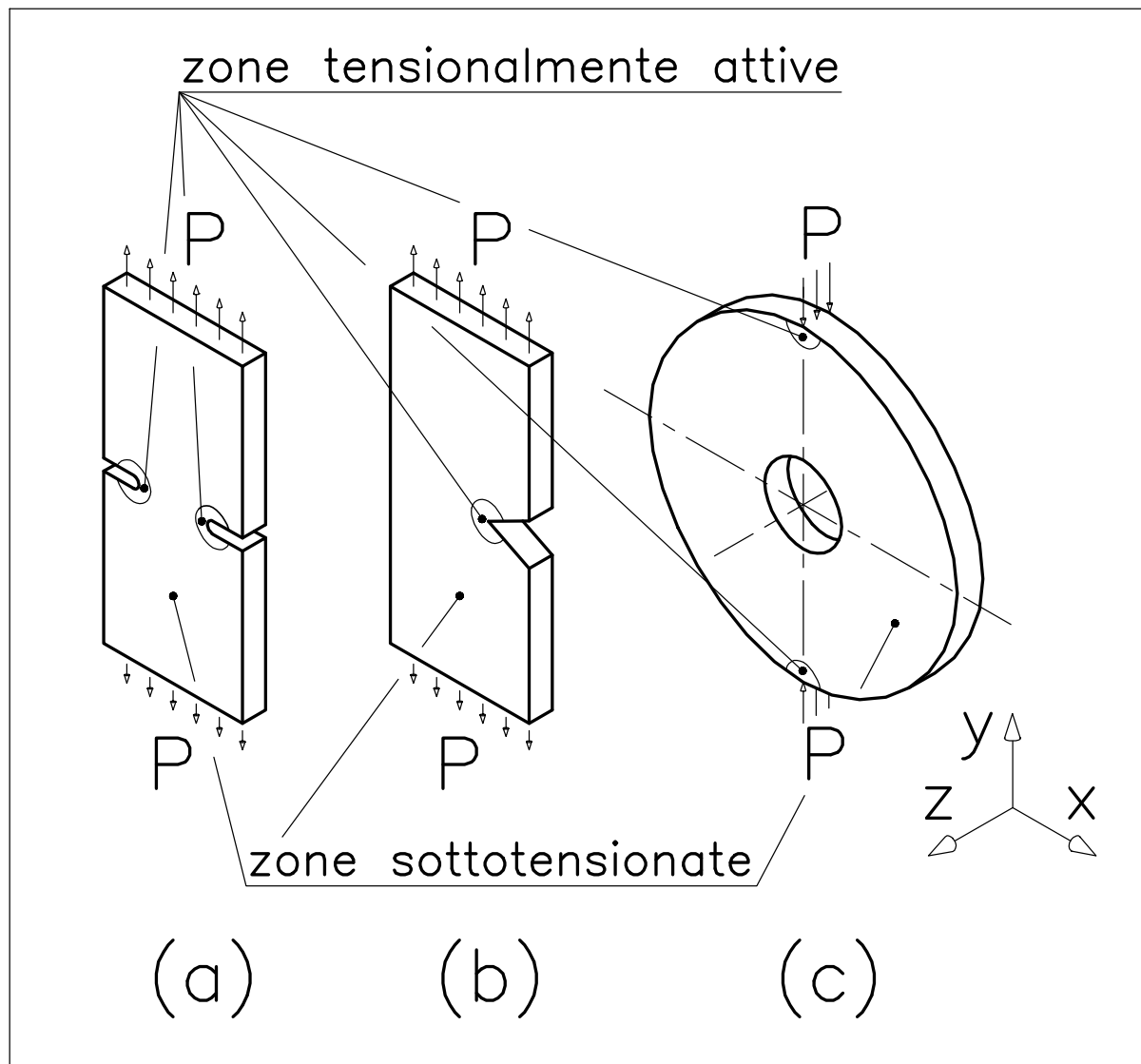


Figura 6.9
sottotensionate esercitano un freno alla tendenza della zona altamente

caricata a variare il suo spessore, zona che quindi non è pienamente in tensione piana, ma in uno stato intermedio tra tensione e deformazione piana. La zona della lastra lontana dall'intaglio lavora invece pienamente in tensione piana.

La Figura 6.9 (b) rappresenta un intaglio a spigolo rientrante vivo, dove le tensioni tendono matematicamente all'infinito. Provini simili vengono impiegati per caratterizzare i materiali nel campo della meccanica della frattura, tramite un indice chiamato Stress Intensity Factor. Anche qui il gradiente di tensione è molto alto in vicinanza dell'intaglio, e quindi la zona caricata non lavora in tensione piana anche se lo spessore in direzione z della lastra è piccolo. A tale riguardo si riporta un passo estratto da un articolo sulla meccanica della frattura: *The experimental determination of SIF [Stress Intensity Factor] for a plate containing a through crack is known to yield a higher result than the corresponding two-dimensional solution. The difference in SIF values is due to the fact that a constraint develops near the crack tip in the experiment since the plate thickness is much greater than the crack-root radius. This results in a state of nearly plane strain near the crack tip. At distances which are substantially larger than the thickness from the crack tip, a state of nearly generalized plane stress will result. As noted earlier, a zone of transition will exist between these extremes, resulting in a three-dimensional problem.*

Un altro passo significativo, sempre nel campo della meccanica della frattura, è riportato nel seguito. Se lo stato di tensione in un provino intagliato tipo quello della Figura 6.9 (b) fosse totalmente in uno stato piano di tensione o di deformazione, il teorema di Mitchell (vedi il Paragrafo 8) ci assicura che tale stato deve risultare indipendente dalle costanti elastiche E e ν . In altre parole, se si impiegano materiali con E e ν diversi, lo stato tensionale, a parità di carico, non dovrebbe variare. Invece in questo passo si legge: *Experimental investigations revealed the beam models to be in a plane state of stress except very near the crack tip. . . . From the results obtained, it is observed that the influence of elastic constants (E and ν) are insignificant except at the notch tips.*

La sensibilità dello stato tensionale alle costanti elastiche E e ν tradisce il fatto che lo stato tensionale non è totalmente né in tensione piana né in deformazione piana, ma in una situazione mista.

Si considera ora la Figura 6.9 (c). In questo caso, un alto gradiente di tensione è causato non da intagli, ma da carichi concentrati. Lo stato tensionale nelle zone tensionalmente più attive non è quindi pienamente di tensione piana, anche se lo spessore in direzione z dell'anello è piccolo. Si paragoni l'impedimento all'instaurarsi di uno stato piano di tensione dovuto

ad un caricamento troppo concentrato, Figura 6.9 (c) , con l'impedimento dovuto ad un vincolamento, Figura 6.1 (d) .

Si considerano infine casi di **corpi in grosso spessore, che però non lavorano** totalmente **in stato piano di deformazione**. La Figura 6.10 presenta una selezione di esempi. Il caso (a) è quello di un tubo soggetto a pressione interna, di notevole lunghezza in direzione z . A causa dello spessore considerevole in direzione z , si potrebbe pensare che il tubo lavorasse in deformazione piana. (Si noti che l'espressione "tubo in grosso spessore" può indicare due cose: a) che lo spessore radiale del tubo è alto;

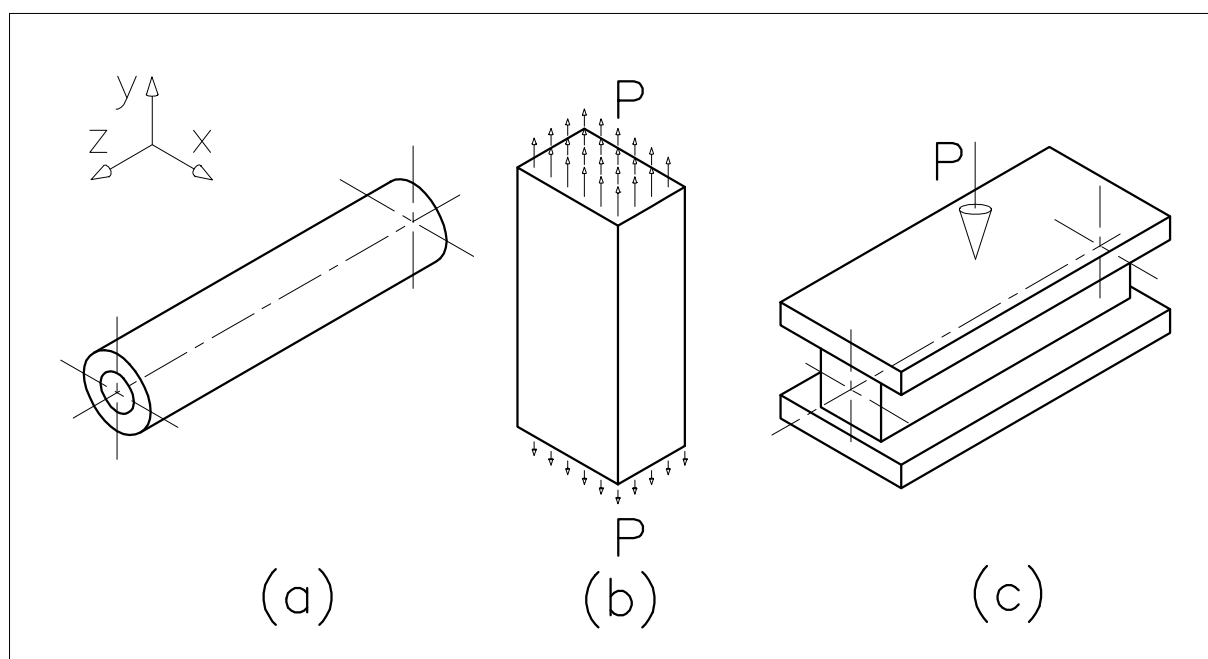


Figura 6.10

b) che lo spessore assiale, cioè la lunghezza del tubo, è alto. Qui ci si concentra sullo spessore assiale, in direzione z .) Se però il tubo è libero di dilatarsi assialmente, come quando possiede soffiotti di dilatazione alle estremità, lavora in tensione piana anche se molto lungo. Infatti lo stato tensionale nel piano $x - y$ del tubo possiede la particolarità che le tensioni radiale e circonferenziale variano a seconda della distanza dal centro del tubo, cioè variano col raggio, ma la deformazione assiale che tali tensioni generano, calcolabile tramite la legge di Hooke, è indipendente dal raggio, cioè costante per tutti i punti della sezione sul piano $x - y$ del tubo. Non nascono quindi quegli ingobbamenti delle sezioni che frenano i flussi assiali del materiale, e che favoriscono l'insorgere dello stato di deformazione piana. In questo caso le sezioni, non ingobbandosi, non si ostacolano vicendevolmente nel movimento di dilatazione o contrazione assiale, e il tubo si adatta alle condizioni al contorno che vengono imposte

alle due estremità del tubo, condizioni appunto di tensione piana per la presenza dei soffietti di dilatazione.

Alla luce delle osservazioni critiche precedenti, la seguente catalogazione, proposta da un testo autorevole, dei tubi lunghi tra i corpi che lavorano in deformazione piana, non appare sempre corretta: [*A plane strain condition occurs*] *when the dimension of the body in the z direction is very large. There are many important problems of this kind, for instance, . . . a cylindrical tube with internal pressure . . .*

Il caso di Figura 6.10 (b) riguarda una trave in grosso spessore in direzione z ed anche in direzione x , soggetta a trazione in direzione y . In questo caso si genera nel corpo uno stato tensionale uniforme monodimensionale in direzione y , e quindi non avvengono ingobbamenti delle sezioni, che si contraggono in direzione x e y fino a che si instaurano ovunque nel corpo le condizioni al contorno applicate alle superfici laterali della trave, cioè di tensione piana. In conclusione, la trave è in tensione piana sia relativamente alla direzione x che alla direzione z . Siccome i piani perpendicolari alla direzione z traslano senza ingobbarsi, per tutti i punti del corpo si ha $\varepsilon_z = \text{costante}$ e $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, una situazione chiamata di **deformazione piana generalizzata** in direzione z . Appare dalla Figura 6.10 che il corpo di Figura 6.10 (b) è anche in deformazione piana generalizzata nelle direzioni x ed y .

La geometria di Figura 6.10 (c) è quella di una trave a sezione quadrata, schiacciata tra due piani assunti rigidi, assumendo per semplicità attrito nullo. Tale situazione appare a prima vista estremamente analoga a quella di Figura 6.2 (a). In questo caso, però, non vi sono zone adiacenti altamente caricate e debolmente caricate, ma lo stato tensionale è compressivo uniforme in direzione y . Non nascono ingobbamenti delle sezioni, e quindi lo stato tensionale nei punti interni rimane uguale a quello sulle pareti non caricate, cioè la trave risulta in tensione piana sia relativamente alla direzione x che alla direzione z .

La Figura 6.11 presenta un altro controcaso di corpo in grosso spessore in direzione z , ma non lavorante in deformazione piana. Si tratta di un pannello isolante impiegato nei contenitori per trasporto di materiale alimentare, soggetto a momento flettente. L'andamento della tensione flessionale è ancora a farfalla, ma le tensioni nell'anima di polistirolo sono molto minori di quelle sulle lamine metalliche, dato che queste ultime sono più rigide, e quindi assorbono un'aliquota superiore del carico. Le tensioni

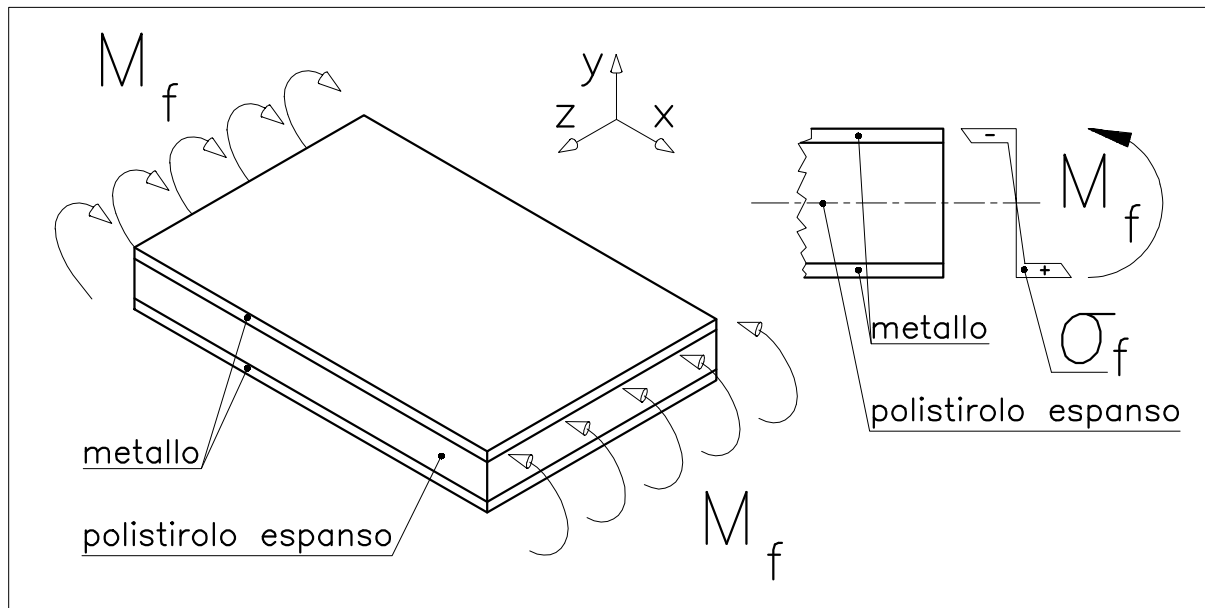


Figura 6.11

sono quasi uniformi lungo lo spessore delle lamine metalliche. Lo strato centrale in polistirolo espanso non è in grado di precludere le contrazioni in direzione z delle due lamine metalliche, derivanti dalle tensioni di flessione. La lamina metallica superiore risulta quindi soggetta a compressione monoassiale in direzione x , e la lamina inferiore a trazione monoassiale esattamente come la lastra di Figura 6.1 (a). Le due lamine metalliche lavorano quindi in tensione piana nelle due direzioni x ed y , e non in deformazione piana, nonostante lo spessore elevato del pannello in direzione z .

∩ ∩ ∩ ∩

La meccanica è il paradiso delle scienze matematiche, perché con quella si viene al frutto matematico.

Leonardo da Vinci

∩ ∩ ∩ ∩

7 Possibilità di descrivere stati assialsimmetrici tramite modelli in deformazione piana

Nell'analisi meccanica di componenti meccanici complessi tramite approcci numerici agli elementi finiti, i casi di tensione piana, di deformazione piana e di assialsimmetria sono ugualmente gravosi, perché sono tutti problemi bidimensionali. Se un corpo lavora in uno di questi tre stati, occorre fornire al calcolatore l'informazione necessaria ad imporre tensione piana, deformazione piana, od assialsimmetria. Fotoelasticamente invece è molto più semplice realizzare uno stato piano di tensione o di deformazione rispetto ad uno stato assialsimmetrico. E' opportuno quindi chiarire, relativamente ad uno studio fotoelastico, quando uno stato di deformazione piano può simulare con sufficiente accuratezza un problema assialsimmetrico. L'osservazione fondamentale è la seguente: se il corpo è assialsimmetrico e si deforma in modo tale che un punto qualunque, definito dal raggio r , non varia sensibilmente il raggio nel passare dalla situazione indeformata alla deformata, allora non nascono deformazioni circonferenziali rilevanti, ed il corpo assialsimmetrico può venire studiato fotoelasticamente come in deformazione piana; se il raggio varia molto, il corpo non può essere studiato tramite un modello in deformazione piana.

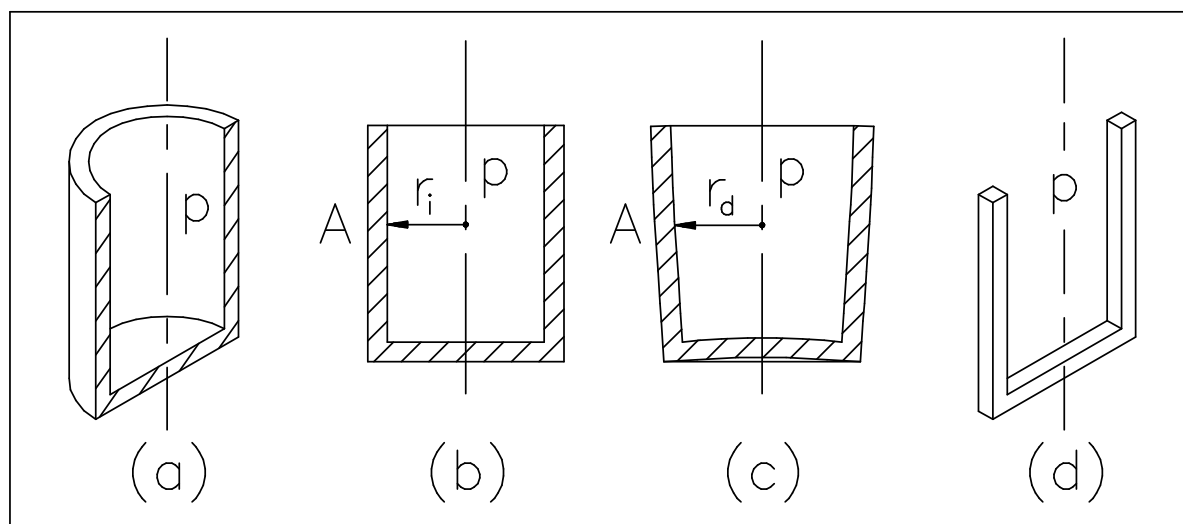


Figura 7.1

In Figura 7.1 (a) è rappresentato un recipiente a forma di bicchiere, riempito di un liquido che esercita una pressione p (variabile) sulla parete cilindrica, parete trattenuta nel suo spostamento radiale centrifugo dalle fibre circonferenziali. In seguito alla deformazione radiale centrifuga della parete cilindrica, il raggio indeformato r_i di un punto generico A della parete cilindrica, Figura (b), diventa il raggio deformato r_d sensibilmente

maggiore di r_i , Figura (c), producendo nelle fibre cerchianti una deformazione circonferenziale positiva e quindi una tensione circonferenziale trattiva, che frenano lo spostamento radiale della parete cilindrica. Un modello piano del corpo assialsimmetrico è una struttura ad U, Figura (d), nella quale le ali verticali risultano molto più deformabili della parete cilindrica dell'analogo corpo assialsimmetrico, Figura (a), dato che le ali del modello piano non sono più trattenute dalle fibre circonferenziali presenti invece nel corpo assialsimmetrico. In questo caso quindi la schematizzazione piana (d) non simula se non molto grossolanamente il corpo reale assialsimmetrico (a).

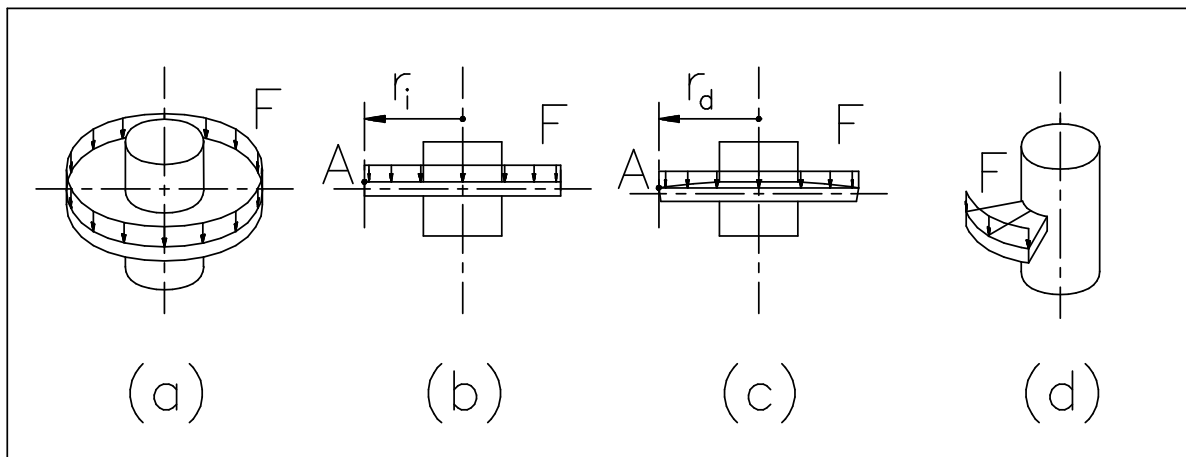


Figura 7.2

Si consideri ora una piastra anulare incastrata al bordo interno e caricata da una forza lineare trasversale uniforme F applicata al bordo esterno, Figura 7.2 (a). In questo caso il raggio indeformato r_i di un punto qualunque A della piastra, Figura (b), ed il raggio deformato r_d dello stesso punto A , Figura (c), non variano troppo tra loro in seguito all'inflessione della piastra, per cui un modello in deformazione piana di questo problema assialsimmetrico, Figura (d), è accettabile. Tale modello è in questo caso essenzialmente (a parte la forma lievemente rastremata) una mensola incastrata ad una estremità e caricata da una forza lineare trasversale all'altra estremità, e lavorante in deformazione piana. Nel simulare il corpo assialsimmetrico, è infatti preferibile adottare un modello in deformazione piana piuttosto che in tensione piana, dato che uno spicchio della struttura assialsimmetrica non cambia la sua ampiezza angolare con la deformazione, dove tale costanza dell'ampiezza angolare è analoga alla costanza dello spessore in un modello in deformazione piana.

In un testo autorevole su piastre e gusci si legge, per geometrie tipo piastra analoghe a quella di Figura 7.2 : [*The deflection and stress*

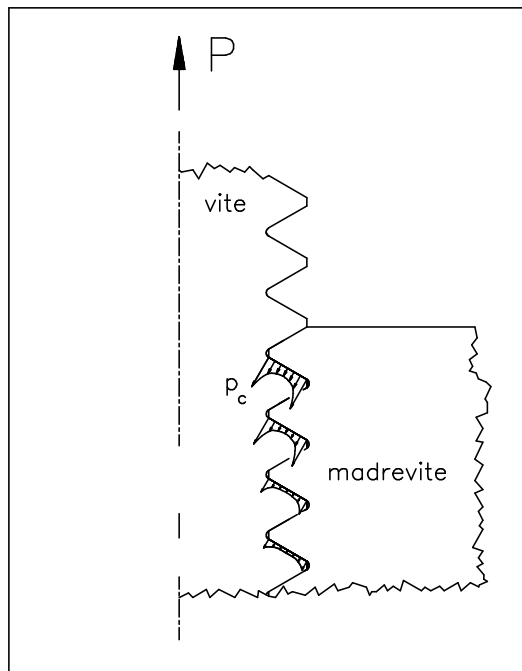


Figura 7.3

modelli agli elementi finiti sulla trasmissione del carico tra vite e madrevite. In un articolo su collegamenti filettati, si legge: *The simplified 2D (two-dimensional) calculation of elastic contact problem is solved, due to the symmetry. . . for the screw thread. The contact between these two parts is simulated by adaptive gap elements. We have considered here a plane strain structural situation.*

coefficients] can be obtained with sufficient accuracy by considering a radial strip as a beam with end conditions and loading as in the actual plate.

Si considera da ultimo un collegamento filettato, Figura 7.3 , una geometria essenzialmente assialsimmetrica salvo l'angolo d'elica. Il filetto della vite si comporta in modo abbastanza simile a quello della piastra anulare di Figura 7.2 . Infatti il raggio di un punto qualunque del filetto cambia poco in seguito all'inflessione del filetto, per cui un'approssimazione in deformazione piana è ritenuta accettabile, e spesso impiegata nei

∩ ∩ ∩ ∩

"Ho paura che non abbia grande stima dei nostri critici drammatici, signor Wilde che cosa gli farebbe fare ? "

"Dovrebbero essere mandati in pensione, e gli si dovrebbe consentire solo di scrivere sulla politica o sulla teologia o sul bimetallismo, o su qualche argomento più facile dell'arte."

Oscar Wilde, Intervista a se stesso, 1895

∩ ∩ ∩ ∩

8 Il teorema di Mitchell

Il teorema di Mitchell chiarisce in alcuni casi se lo stato tensionale dipende dalle costanti elastiche, e cioè se una variazione di E o di ν altera lo stato tensionale. Si considerano nell'ordine gli stati piani, gli stati assialsimmetrici, e gli stati tridimensionali.

In **stati piani**, in piccole deformazioni e per materiali elastici omogenei isotropi, se la risultante delle forze applicate ad ogni contorno preso singolarmente del corpo è nulla, se le condizioni al contorno sono solo sulle tensioni o sulle forze, e se le forze inerziali sono nulle, lo stato di tensione nel piano è indipendente dalle costanti elastiche E e ν , e tale stato tensionale è lo stesso per stato di tensione piana e per stato di deformazione piana. Variano le tensioni perpendicolari al piano delle tensioni, nulle in tensione piana e non nulle in deformazione piana, e le frecce. Se i contorni presi singolarmente trasmettono coppie, il risultato riportato vale ugualmente.

Nel caso di corpi a connessione multipla e tali che la risultante delle forze applicate ad ogni contorno preso singolarmente **non** sia nulla, lo stato di tensione dipende dal solo coefficiente di Poisson e non dal Modulo di Young.

Per **geometrie assialsimmetriche**, nel caso in cui le condizioni al contorno siano sulle sole tensioni, lo stato di tensione in un corpo assialsimmetrico omogeneo isotropo in piccole deformazioni non dipende dal Modulo di Young ma solo dal Coefficiente di Poisson.

Per **casi tridimensionali** non sono disponibili risultati analoghi.

La rilevanza di questo teorema appare evidente nel campo fotoelastico. Si supponga che l'organo meccanico esaminato lavori prevalentemente in deformazione piana. Ora è relativamente semplice realizzare un modello fotoelastico che lavori in tensione piana, dato che basta prenderlo di spessore sottile. Invece, un modello fotoelastico che lavori in deformazione piana richiede un'apparecchiatura che impedisca le variazioni di spessore del modello piano, variazioni spesso impedito accostando alle due facce del modello piano due lastre di Plexiglas in grosso spessore, al costo di attriti indesiderati. Il teorema di Mitchell chiarisce quando un modello in tensione piana, più semplice da realizzare fotoelasticamente, produce le stesse tensioni di un modello in deformazione piana, più complesso nella sua realizzazione fotoelastica.

Un'altra situazione in cui il teorema di Mitchell è utile è nello sviluppo di soluzioni analitiche. Se il teorema di Mitchell è applicabile all'organo meccanico studiato, in genere conviene sviluppare i calcoli in tensione piana piuttosto che in deformazione piana, perché relativamente

più semplici. Si segue questa via nel calcolo delle tensioni nei tubi, vedi il relativo Capitolo.

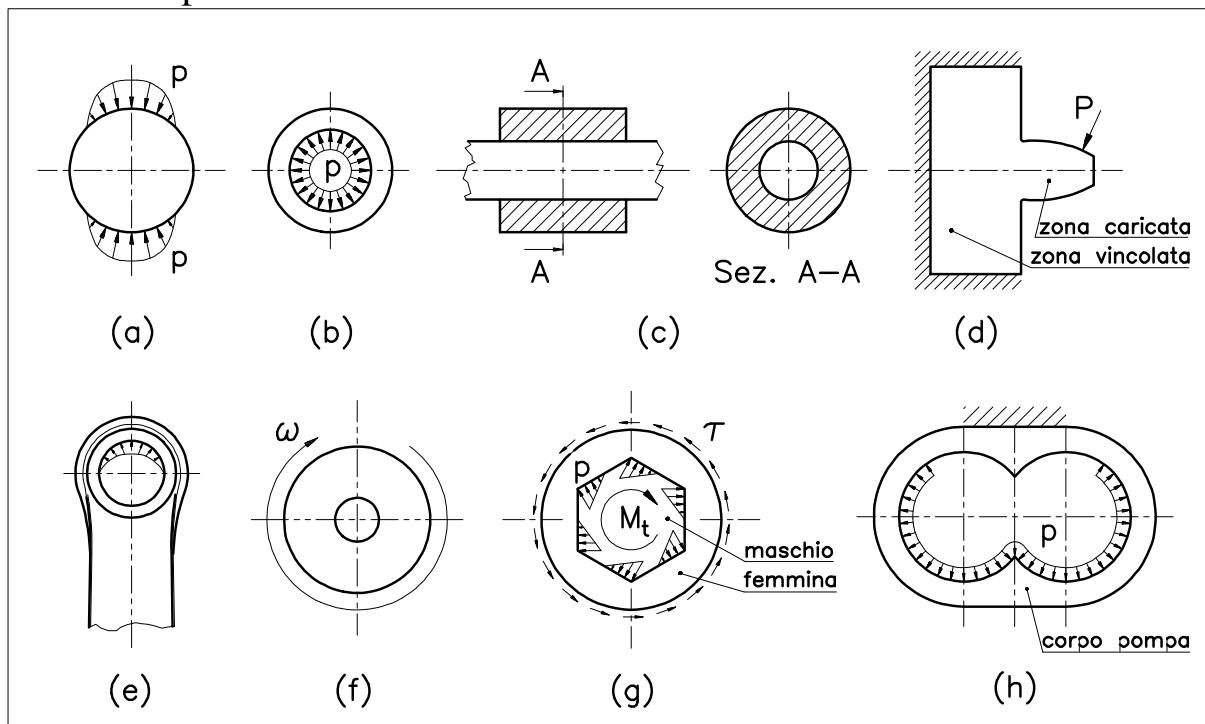


Figura 8.1

Si sviluppano nel seguito alcuni esempi di applicabilità del teorema di Mitchell. In Figura 8.1 si considerano esempi piani. Nella Figura (a) è rappresentato un disco caricato in modo meno concentrato di quello di Figura 6.9 (c) . Il teorema di Mitchell vale, e quindi le tensioni sono indipendenti dalle costanti elastiche E e ν , e tensione piana e deformazione piana producono le stesse tensioni nel piano delle tensioni, anche se le frecce sono diverse.

In Figura 8.1 (b) è disegnato un tubo soggetto a pressione interna. Si tratta di un corpo non semplicemente connesso, ma con risultanti nulle sui singoli contorni. Il teorema di Mitchell vale, e quindi le tensioni sono indipendenti dalle costanti elastiche E e ν , e tensione piana e deformazione piana producono le stesse tensioni nel piano delle tensioni, anche se non lo stesso aumento di diametro del tubo.

In Figura 8.1 (c) è rappresentato un forzamento albero-mozzo. La zona centrale del forzamento può essere ritenuta in stato piana, vedi il Capitolo sui Tubi. Il caricamento del mozzo e dell'albero avviene attraverso forzamento, e quindi le condizioni al contorno sono sugli spostamenti. Di conseguenza il teorema di Mitchell non è applicabile. Risulta infatti evidente che le tensioni nel mozzo e nell'albero dipendono dalle costanti elastiche. A parità di interferenza, le tensioni in un mozzo ed

in un albero di gomma sono diverse da quelle in un mozzo ed in un albero di acciaio.

In Figura 8.1 (d) è rappresentato un dente di una ruota dentata cilindrica a denti diritti, caricato in vicinanza della testa. A causa della presenza di una zona vincolata, il teorema di Mitchell non vale. Tuttavia i risultati del teorema sono sostanzialmente applicabili nell'intorno della zona caricata, ma non vicino alla zona vincolata. In prossimità del vincolo, le tensioni dipendono dalle costanti elastiche E e ν , e tensione piana e deformazione piana non producono le stesse tensioni nel piano delle tensioni.

In Figura 8.1 (e) è rappresentata una testa di biella, col caricamento tipico del punto morto superiore all'incrocio. Ammesso che un modello piano descriva accettabilmente la geometria tridimensionale della testa, il teorema di Mitchell non è applicabile perché la risultante delle forze sui singoli contorni non è nulla. Le tensioni dipendono dalle costanti elastiche. Prove numeriche hanno comunque mostrato che la dipendenza delle tensioni da ν è debole.

In Figura 8.1 (f) è disegnata una mola rotante. Il teorema di Mitchell non vale, dato che il corpo è caricato da forze inerziali.

In Figura 8.1 (g) è rappresentato collegamento poligonale tipo chiave a brugola, studiato come problema piano. La risultante delle pressioni di contatto tra maschio e femmina al bordo interno della femmina produce una coppia pura. Se la coppia equilibrante è imposta tramite forze applicate al bordo esterno della femmina (in Figura è stata supposta una tensione τ distribuita) e non tramite vincolamento, il teorema di Mitchell vale, e quindi le tensioni sono indipendenti dalle costanti elastiche E e ν , e tensione piana e deformazione piana producono le stesse tensioni nel piano delle tensioni, anche se deformate diverse.

In Figura 8.1 (h) è rappresentato schematicamente il corpo di una pompa ad ingranaggi, caricato dalla distribuzione di pressione del fluido pressurizzato, e vincolato lungo il lato superiore. Se si accetta questo modello piano, il teorema di Mitchell non vale, a causa della presenza di una zona vincolata. Se poi il corpo della pompa non è vincolato, ma è reso equilibrato, rispetto al carico dovuto alla pressione, tramite forze applicate al bordo esterno del corpo pompa, forze per esempio agenti nella zona che appare vincolata nella Figura 8.1 (h), anche in questo caso il teorema di Mitchell non vale, dato che la risultante della pressione agente lungo il bordo della cavità del corpo pompa non è nulla.

9 Esercizio svolto di Teoria dell'Elasticità: protesi d'anca

Si considera una protesi d'anca, formata da a) uno stelo metallico che viene inserito nella cavità femorale, da b) una testina sostitutiva della testa del femore, fissata allo stelo ed inserita nella cavità sferica di c) un acetabolo fissato al bacino, Figura 9.1 . La testina, ruotando nella cavità sferica, ripristina l'articolazione originaria dell'anca. La protesi qui studiata è di un tipo molto particolare, sviluppato in Inghilterra. La testina e l'acetabolo sono metallici, ma l'acetabolo è rivestito da un sottile strato elastomerico, ad esso saldamente incollato. Si vuole così imitare la natura, che spesso prevede strati soffici interposti tra superfici coniugate, come nel caso del menisco nel ginocchio. Il contatto tra testina ed acetabolo, reso soffice dall'interposizione dello strato elastomerico, promuove l'instaurarsi di un meato di fluido sinoviale, riducendo così l'usura dei materiali nello snodo sferico. La Figura 9.2. (a) rappresenta la protesi nella posizione in cui viene studiata in laboratorio, evidenziando la testina, l'acetabolo, e lo strato elastomerico. La Figura 9.2 (b) presenta la protesi ancora scarica. Si sono tracciate delle linee radiali ideali nello strato elastomerico, per evidenziare nella Figura 9.2 (c) la deformazione dell'elastomero quando la

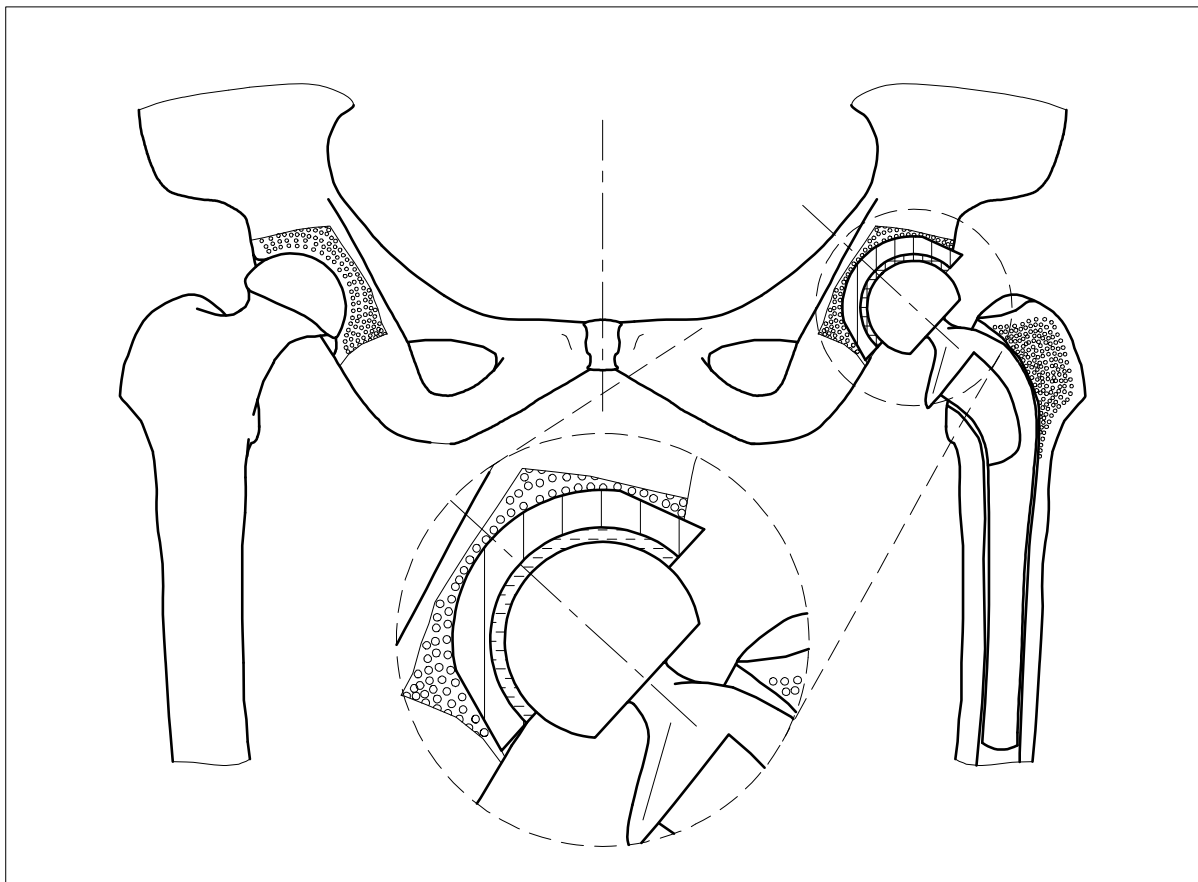


Figura 9.1

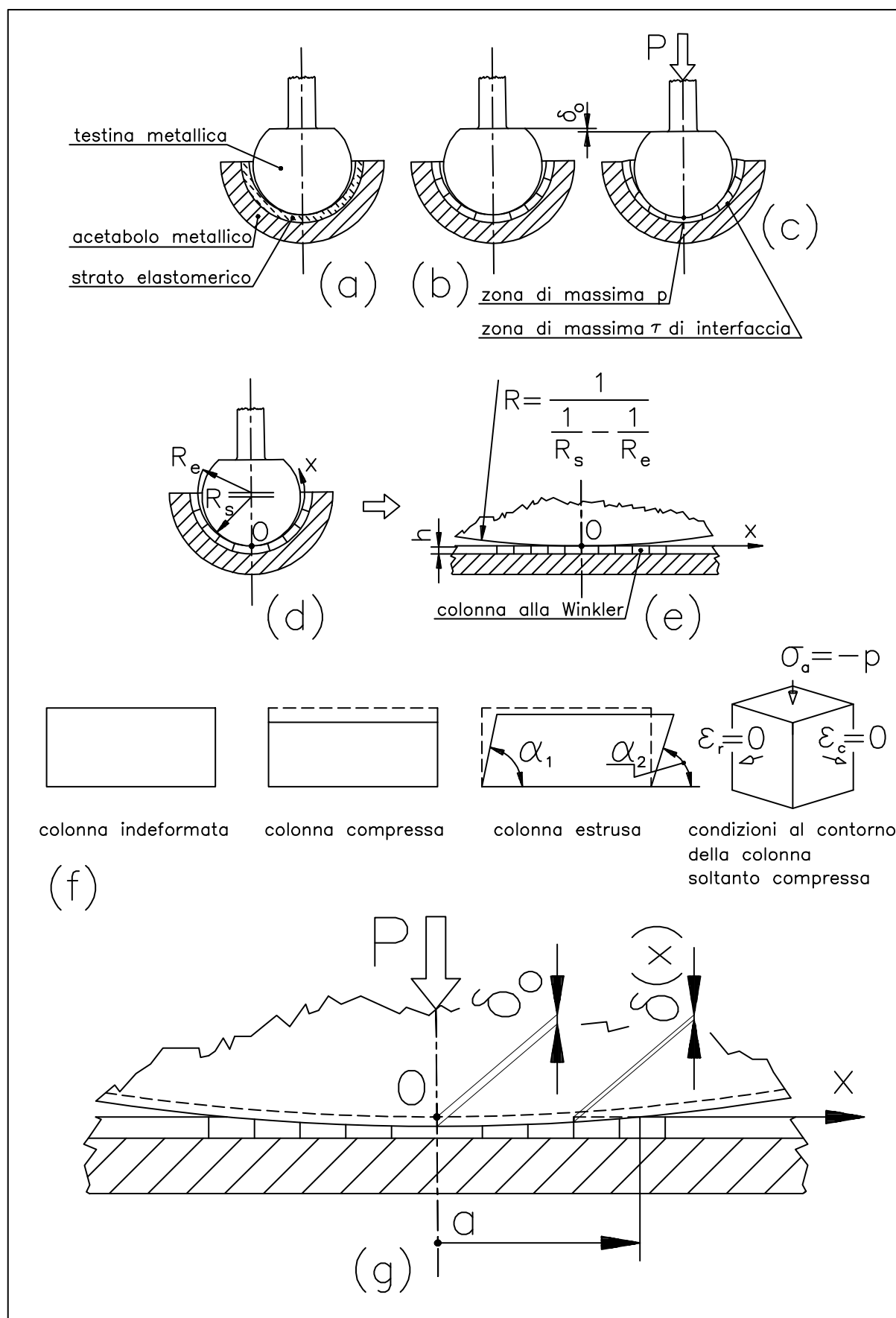


Figura 9.2

protesi viene caricata da una forza compressiva P che produce una profondità di indentazione δ_0 . Le linee radiali ideali, una volta deformate, indicano che l'elastomero tende a venire estruso lateralmente, dato che è scarsamente comprimibile. Nascono così nocive tensioni tangenziali all'interfaccia tra acetabolo e strato elastomerico che, se troppo alte, producono lo scollamento dell'elastomero ed il conseguente grippaggio della protesi. I calcoli mostrano che le tensioni tangenziali sono massime a circa 45° dall'asse della testina, mentre la pressione di contatto massima cade al centro del contatto testina-strato elastomerico. La Figura (d) rappresenta ancora la testina scarica, e chiarisce il significato di vari simboli: R_s denota il raggio della testina sferica, R_e indica il raggio della superficie interna dello strato sferico, ed x rappresenta una coordinata meridiana lungo la superficie interna dello strato elastomerico, la cui origine cade al centro del contatto O tra testina e strato elastomerico. La Figura (e) presenta un modello "rettificato" della geometria (d), vantaggioso per la trattazione matematica, dove lo strato elastomerico, di spessore h , è rappresentato raddrizzato, ed il raggio R della testina viene aumentato considerevolmente rispetto ad R_s , in modo che il gioco iniziale tra testina e strato elastomerico al variare della coordinata x di Figura (e), la stessa coordinata di Figura (d), sia il più possibile simile a quello della geometria effettiva (d). L'espressione riportata di R è derivata dalla teoria Hertziana, e descrive quindi il raggio della "testina equivalente" a quella reale, nel senso che produce un gioco iniziale tra testina equivalente e strato elastomerico rettificato simile al gioco reale.

Si è già accennato al fatto che, quando la testina viene caricata, lo strato elastomerico viene estruso lateralmente. In realtà il fenomeno è più complesso. Lo strato elastomerico viene in parte schiacciato radialmente, dato che è comprimibile, anche se poco, ed in parte viene estruso lateralmente. La Figura 9.2 (f) rappresenta i due diversi modi di deformare di una colonna ideale generica di elastomero. Se l'elastomero è di un tipo molto comprimibile, il primo meccanismo prevale, mentre se l'elastomero è quasi incomprimibile, non può che in minima parte essere schiacciato radialmente, e quindi il secondo meccanismo predomina. Nella deformazione di pura estrusione laterale della colonna ideale, gli angoli α_1 ed α_2 sono diversi ($\alpha_1 < \alpha_2$), in modo che l'area del fianco della colonna indeformata e deformata rimanga la stessa, per rispettare la condizione di incomprimibilità. Questo scorrimento laterale della colonna spiega l'insorgere di tensioni tangenziali all'interfaccia tra strato elastomerico ed acetabolo, tensioni tangenziali assenti nel caso di colonna puramente compressa. I calcoli mostrano che il primo meccanismo ha il sopravvento se $v \leq 0.48$, mentre il secondo meccanismo prevale se $v \geq 0.499$. Se 0.48

$\leq v \leq 0.499$, i due meccanismi sono di importanza confrontabile. Gli elastomeri impiegati effettivamente in questa protesi sono virtualmente incompressibili, per cui il meccanismo di estrusione laterale dell'elastomero predomina. La modellazione di un solido incompressibile è però troppo complessa per poter essere trattata in questo testo, per cui ci si limita a sviluppare il caso in cui la comprimibilità dell'elastomero è abbastanza alta, cioè $v \leq 0.48$. (Sono stati anche sperimentati elastomeri porosi, e quindi molto comprimibili, perché si sperava che fossero in grado di assorbire il fluido sinoviale, e di restituirlo poi durante la fase più critica della deambulazione. Infatti, quando la gamba si appoggia al suolo, il carico sulla protesi è massimo, ma la velocità di rotazione relativa della testina rispetto allo strato elastomerico è minima, e quindi è minima la capacità portante del contatto lubrificato, e minimo diventa lo spessore del meato di fluido lubrificante, con pericolo di usura. Quando la gamba viene proiettata in avanti, la velocità di rotazione raggiunge un massimo proprio mentre il carico è minimo, e quindi il meato di lubrificante raggiunge il massimo spessore, limitando il pericolo di usura. In conclusione, un "effetto polmone" benefico sarebbe quello di uno strato elastomerico che riuscisse ad assorbire fluido sinoviale quando il carico sulla protesi è minimo, cioè quando la gamba viene proiettata in avanti, restituendo poi il fluido quando la gamba si carica. Purtroppo gli esperimenti hanno indicato che un elastomero poroso non realizza questo effetto polmone.)

Riassumendo, si esamina in questo testo la protesi immaginata realizzata impiegando un elastomero abbastanza comprimibile, per contenere le difficoltà matematiche, al prezzo però di perdita di realismo dell'analisi. Si ipotizza inoltre che ogni colonna di elastomero si schiacci senza trascinare le colonne adiacenti, cioè si trascura la tensione tangenziale all'interfaccia tra due colonne contigue. Questa modellazione dello strato elastomerico è detta "alla Winkler" . L'ultima delle Figure (f) rappresenta le condizioni al contorno da applicare ad ogni colonna di elastomero vista alla Winkler. La pressione agisce in direzione assiale, mentre le superfici laterali della colonna, orientate nelle direzioni radiale e circonferenziale, non si deformano perché si considera soltanto il caso di compressione pura della colonna. Come già notato, questo studio non è quindi in grado di valutare le tensioni taglienti all'interfaccia tra strato elastomerico ed acetabolo, segnalate in Figura (c) . La Figura (g) mostra un ingrandimento del modello della Figura (e) , però con lo strato elastomerico schiacciato. Si noti che le righe radiali ideali della Figura (b) , nella Figura (g) non si spostano lateralmente in seguito al caricamento della protesi, come invece accade nella Figura (c) , dato che si è ipotizzato che lo strato elastomerico si schiaccia ma non estrude lateralmente. Con δ_0

si è indicata la profondità di indentazione, come in Figura (c) . Con $\delta(x)$ si è rappresentato lo schiacciamento di una generica colonna definita dalla coordinata x , la cui origine cade al centro del contatto O tra testina e strato elastomerico. Infine, a denota il raggio della impronta circolare di contatto tra testina e strato elastomerico.

Si vuole nel seguito calcolare il legame tra pressione massima e profondità di indentazione, ed anche il legame tra raggio dell'impronta di contatto e profondità di indentazione.

Si inizia dallo studio del legame tra raggio dell'impronta di contatto e profondità di indentazione. Per semplicità, si impiega nei calcoli una approssimazione polinomiale del profilo sferico della testina equivalente di Figura 9.2 (g) . Il profilo tratteggiato y della testina equivalente appoggiata (e non ancora compressa) allo strato elastomerico possiede la seguente espressione, derivata dalla teoria Hertziana :

$$y = \frac{x^2}{2R} \quad (9.1)$$

Se quindi comprimo la testina di una profondità di indentazione δ_0 , emerge dalla Figura 9.2 (g) che lo schiacciamento di una generica colonna ideale di elastomero è :

$$\delta(x) = \delta_0 - \frac{x^2}{2R} \quad (9.2)$$

Lo schiacciamento si annulla dove termina il contatto tra testina equivalente e strato elastomerico, cioè per $x = a$. Sostituendo quindi nella (9.2) ad x il simbolo a , e ponendo $\delta(a) = 0$, si ottiene :

$$\delta(a) = 0 = \delta_0 - \frac{a^2}{2R} \Rightarrow a = \sqrt{2\delta_0 R} \quad (9.3)$$

Si è quindi ottenuto il legame cercato tra raggio dell'impronta di contatto a e profondità di indentazione δ_0 , secondo il modello di Winkler. Dalla sterminata bibliografia relativa al contatto tra un indentatore rigido ed uno strato deformabile, emerge che conviene esprimere tale legame in funzione delle variabili normalizzate a/h (h rappresenta lo spessore dell'elastomero, Figura 9.2 (e)) e $\delta_0 R/h^2$. Dividendo quindi ambo i membri della (9.3) per h , si ottiene :

$$\frac{a}{h} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} \quad (9.4)$$

Si esamina ora il legame tra pressione massima di contatto p_0 (agente nel punto O di Figura 9.2 (g)) e profondità di indentazione δ_0 . Al punto O si ha :

$$\sigma_a = -p_0 \quad ; \quad \varepsilon_a = -\frac{\delta_0}{h} \quad (9.5)$$

La legge di Hooke applicata al punto O si scrive :

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_c - p_0)] = 0 \\ \varepsilon_c &= \frac{1}{E} [\sigma_c - \nu (\sigma_r - p_0)] = 0 \\ \varepsilon_a &= \frac{1}{E} [-p_0 - \nu (\sigma_r + \sigma_c)] = -\frac{\delta_0}{h} \end{aligned} \quad (9.6)$$

da cui si ricava :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_c = -\frac{\nu p_0}{1-\nu} \\ \frac{\delta_0}{h} &= \frac{1}{E} \left(p_0 - 2\nu^2 \frac{p_0}{1-\nu} \right) = \frac{p_0}{E} \left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \right) = \frac{p_0}{E} \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \Rightarrow \\ p_0 &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\delta_0}{h} \end{aligned} \quad (9.7)$$

Si è quindi ottenuto il legame cercato tra pressione massima di contatto p_0 e profondità di indentazione δ_0 . Dalla bibliografia relativa al contatto tra un indentatore rigido ed uno strato deformabile, appare che conviene esprimere tale legame in funzione delle variabili normalizzate $p_0 R/(Ea)$ e $\delta_0 R/h^2$. Moltiplicando quindi ambo i membri della (9.7) per $R/(Ea)$, si ottiene :

$$\frac{p_0 R}{E a} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\delta_0}{h} \frac{R}{E a} \quad (9.8)$$

da cui, semplificando E e sostituendo ad a il valore della (9.3), si ottiene :

$$\frac{p_0 R}{E a} = \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\delta_0}{h} \frac{R}{\sqrt{2 \delta_0 R}} = \frac{(1-\nu)}{\sqrt{2} (1+\nu)(1-2\nu)} \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} \quad (9.9)$$

Si è quindi ottenuto il legame teorico cercato tra pressione massima di contatto normalizzata, $p_0 R/(Ea)$, e profondità di indentazione normalizzata, $\delta_0 R/h^2$, col modello di Winkler. Più generalmente, il legame tra pressione normalizzata ed indentazione normalizzata per un punto di coordinata x si ricava dalla (9.7) :

$$p(x) = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\delta(x)}{h} \quad (9.10)$$

Il carico P che agisce sulla testina equivalente di Figura 9.2 (g) si ottiene per integrazione della (9.10) tenendo conto della (9.3), e ricordando che il contatto è assialsimmetrico :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^a p(x) 2\pi x dx = \frac{2\pi E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{h} \int_0^a \left(\delta_0 - \frac{x^2}{2R} \right) x dx = \\ &= \frac{2\pi E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{h} \left(\frac{\delta_0 a^2}{2} - \frac{a^4}{8R} \right) = \frac{\pi E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\delta_0^2 R}{h} \end{aligned} \quad (9.11)$$

L'espressione (9.11) collega quindi il carico totale P alla profondità di indentazione. Questa espressione non tiene tuttavia conto del fatto che lo strato elastomerico reale è sferico e non piano, e quindi bisognerebbe considerare solo la componente verticale della pressione di contatto. Siccome però la pressione di contatto è massima al centro del contatto, dove la pressione è verticale, e si attenua rapidamente dove la pressione è orientata in direzione molto diversa dalla verticale, l'errore della (9.11) è considerato accettabile.

Come già accennato, i risultati precedenti sono applicabili solo se $\nu \leq 0.48$. Si riportano nel seguito formule valide per un materiale perfettamente incomprimibile, $\nu = 0.5$, che esprimono il legame tra pressione massima e profondità di indentazione, ed il legame tra raggio dell'impronta di contatto e profondità di indentazione. La teoria alla base di queste formule è troppo complessa per poter essere presentata in questo testo. Tali formule permettono di effettuare confronti con quelle valide per un elastomero abbastanza comprimibile.

$$\frac{p_0 R}{E a} = \frac{1}{4} \left(\frac{\delta_0 R}{h^2} \right)^{1.5} ; \quad \frac{a}{h} = 2 \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} ; \quad P = \frac{2\pi E \delta_0^3 R^2}{3 h^3} \quad (9.12)$$

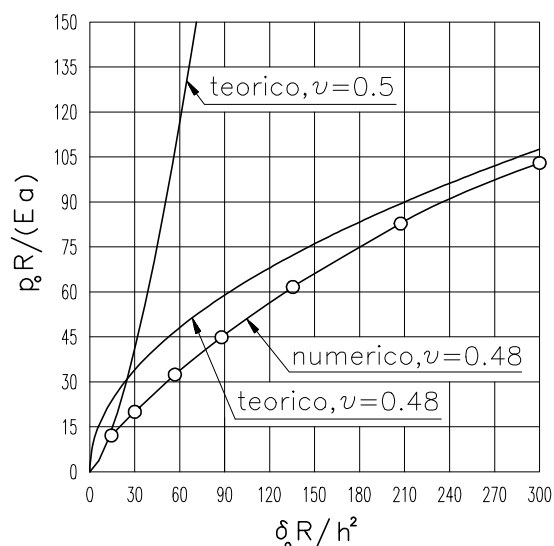


Figura 9.3

impronta normalizzato, mentre la Figura 9.4 riguarda il legame tra profondità di indentazione adimensionalizzata e pressione massima di contatto adimensionalizzata. Si vede che la pressione di contatto teorica alla Winkler per $\nu = 0.48$ è abbastanza prossima ai risultati agli elementi finiti per $\nu = 0.48$. Lo stesso vale per il raggio di impronta. Invece, i risultati teorici per $\nu = 0.5$ sono completamente diversi. Questo è quindi un caso in cui una variazione anche modesta del coefficiente di Poisson in prossimità del valore di incomprimibilità $\nu = 0.5$ può alterare notevolmente lo stato tensionale. Si noti comunque che la variabile di ingresso (quella lungo l'asse x) è la profondità di indentazione normalizzata. Se si assume invece come variabile di ingresso il carico P gravante sulla protesi, la pressione massima di contatto ed il raggio di impronta sarebbero molto meno sensibili a perturbazioni del coefficiente di Poisson. Lo studente è invitato a domandarsi se nelle condizioni operative di una protesi d'anca la variabile di ingresso è la profondità di indentazione od il carico totale.

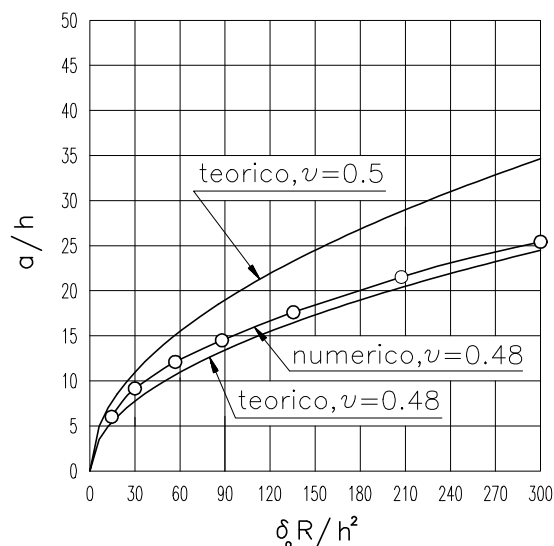


Figura 9.4

Il confronto tra modello comprimibile ed incomprimibile viene arricchito da risultati agli elementi finiti relativi a $\nu = 0.48$. Le Figure 9.3 e 9.4 presentano un confronto tra la soluzioni analitica valida per $\nu = 0.5$, la soluzione analitica valida per $\nu \leq 0.48$ e particolarizzata per $\nu = 0.48$, ed i risultati numerici agli elementi finiti ottenuti per $\nu = 0.48$. La Figura 9.3 è relativa al legame tra profondità di indentazione normalizzata e raggio di

Si sviluppa nel seguito un esempio numerico. Valori tipici della geometria di una protesi reale con strato elastomerico sono : $R_s = 15.875$ mm , $R_e = 16.125$ mm , $h = 2$ mm . L'elastomero impiegato è un poliuretano con $E = 8.5$ MPa .

Il raggio equivalente R vale :

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_s} - \frac{1}{R_e}} = \frac{1}{\frac{1}{15.875} - \frac{1}{16.125}} = 1023.94 \text{ mm} \quad (9.13)$$

Il carico sulla protesi è valutato un certo numero di volte il peso corporeo. Durante il jogging, o in seguito a movimenti rapidi quali scansare un motorino, o per piccoli incidenti quali mancare il gradino di una scala, il carico sulla protesi può avvicinarsi a 10 volte il peso corporeo. Si stima quindi in questo esempio numerico un carico massimo di 5 kN . Per uno **strato elastomerico comprimibile**, supponendo $\nu = 0.48$, si ottiene dalla (9.11) :

$$\frac{\delta_0^2 R}{h} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi E(1-\nu)} P = \frac{(1+0.48)(1-2 \times 0.48)}{\pi \times 8.5 \times (1-0.48)} \times 5'000 = 21.32 \text{ mm}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\delta_0^2 R^2}{h^4} = \frac{\delta_0^2 R}{h} \frac{R}{h^3} = 21.32 \times \frac{1'023.94}{2^3} = 2'728.80 \Rightarrow \frac{\delta_0 R}{h^2} = \sqrt{2'728.80} = 52.24$$

(9.14)

Dalla (9.4) si ottiene il raggio di impronta normalizzato ed effettivo:

$$\frac{a}{h} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} = \sqrt{2} \sqrt{52.24} = 10.22 \Rightarrow a = 10.22 \times 2 = 20.44 \text{ mm}$$

(9.15)

cioè il contatto tra testina e strato elastomerico si estende su una superficie quasi emisferica. Infatti, se il cotile è emisferico (metà sfera), la lunghezza della semicirconferenza di raggio $R_e = 16.125 \text{ mm}$ vale $\pi \times 16.125 = 50.65 \text{ mm}$, poco maggiore del diametro dell'impronta di contatto $2 \times 20.44 = 40.88 \text{ mm}$.

Dalla (9.9) si ottiene poi la pressione massima di contatto normalizzata ed effettiva :

$$\frac{p_0 R}{E a} = \frac{(1-\nu)}{\sqrt{2}(1+\nu)(1-2\nu)} \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} = \frac{(1-0.48)}{\sqrt{2}(1+0.48)(1-2 \times 0.48)} \sqrt{52.24} = 44.89 \Rightarrow$$

$$p_0 = 44.89 \times \frac{E a}{R} = 44.89 \times \frac{8.5 \times 22.62}{1'023.94} = 8.43 \text{ MPa}$$

(9.16)

Per uno **strato elastomerico incompressibile**, $\nu = 0.5$, si ottiene dall'ultima delle (9.12) :

$$\frac{\delta_0^3 R^2}{h^3} = \frac{3}{2 \pi E} P = \frac{3}{2 \pi \times 8.5} \times 5'000 = 280.86 \text{ mm}^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\delta_0^3 R^3}{h^6} = \frac{\delta_0^3 R^2}{h^3} \times \frac{R}{h^3} = 280.86 \times \frac{1'023.94}{2^3} = 35'947.97 \Rightarrow \frac{\delta_0 R}{h^2} = \sqrt[3]{35'947.97} = 33$$

(9.17)

Dalla seconda delle (9.12) si ottiene il raggio di impronta normalizzato ed effettivo:

$$\frac{a}{h} = 2 \sqrt{\frac{\delta_0 R}{h^2}} = 2 \sqrt{33} = 11.49 \Rightarrow a = 11.49 \times 2 = 22.98 \text{ mm} \quad (9.18)$$

cioè il contatto tra testina e strato elastomerico si estende su una superficie poco meno che emisferica. Infatti, se il cotile è emisferico (metà sfera), la lunghezza della semicirconferenza di raggio $R_e = 16.125 \text{ mm}$ vale $\pi \times 16.125 = 50.65 \text{ mm}$, appena maggiore del diametro dell'impronta di contatto $2 \times 22.98 = 45.96 \text{ mm}$. Quindi, siccome lo strato elastomerico è emisferico, per questo carico totale la testina quasi tocca il bordo dello strato elastomerico, il che provocherebbe una usura indesiderata. Si noti che, durante la deambulazione, la testina ruota nella protesi, per cui l'evento indesiderato di contatto sul bordo può verificarsi.

Dalla prima delle (9.12) si ottiene poi la pressione massima di contatto normalizzata ed effettiva :

$$\frac{p_0 R}{E a} = \frac{1}{4} \left(\frac{\delta_0 R}{h^2} \right)^{1.5} = \frac{1}{4} (33)^{1.5} = 47.39 \Rightarrow \quad (9.19)$$

$$p_0 = 47.39 \times \frac{E a}{R} = 47.39 \times \frac{8.5 \times 22.98}{1023.94} = 9.04 \text{ MPa}$$

Si vuole da ultimo sviluppare una osservazione sullo stato tensionale e deformativo nell'intorno del punto O al centro del contatto tra testina e superficie superiore dello strato elastomerico, Figura 9.5 . Si suppone le seguito che l'elastomero sia scarsamente comprimibile, in modo che avvenga una estrusione radiale dell'elastomero. Lo stato tensionale nell'intorno del punto O è quasi perfettamente idrostatico, dato che

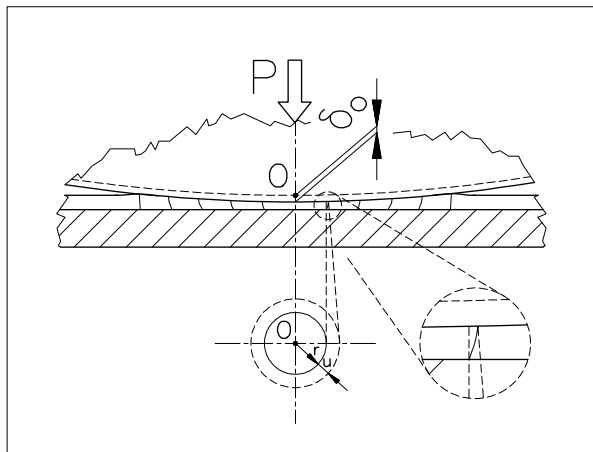


Figura 9.5

l'elastomero in vicinanza di O fatica a defluire lateralmente perché è trattenuto da tutto il materiale elastomerico circostante. Quindi le tensioni assiale, radiale e circonferenziale in O sono virtualmente identiche e compressive. Invece, una piccola circonferenza disegnata idealmente con centro in O sulla superficie superiore dello strato elastomerico, in seguito alla compressione della testina, si dilata in seguito allo

spostamento radiale u di Figura 9.5 , spostamento dovuto all'estrusione radiale dell'elastomero. Di conseguenza la deformazione circonferenziale, che vale u/r (si veda la (2.2)), è necessariamente positiva. Si ha quindi che la tensione circonferenziale è negativa, mentre la deformazione circonferenziale è positiva. Questo cambio di segno è raro in problemi pratici. Una situazione simile si incontra nel forzamento albero-mozzo dove, alle estremità del contatto albero-mozzo, la tensione circonferenziale nel mozzo è negativa, mentre la deformazione circonferenziale è positiva.

Si indaghi anche il segno delle tensioni e deformazioni assiale e radiale nell'intorno del punto O di Figura 9.5 .

~~~~~

*Quando noi fummo là dove la coscia  
Si volge appunto in sul grosso dell'anche . . .*

Dante, Divina Commedia, Inferno, Canto XXXIV

~~~~~

10 Esercizi svolti di Teoria dell'Elasticità

10.1 Si consiglia di leggere questo esercizio solo dopo aver studiato il Capitolo sulla Fotoelasticità. Si consideri la formula che esprime il Bulk Modulus K in funzione delle costanti elastiche E e ν , formula sviluppata nel Paragrafo 4. Nel ricavare questa formula, si sono effettuate delle approssimazioni nel calcolo della variazione relativa di volume $\Delta V/V$. In particolare, si è introdotta la seguente approssimazione:

$$V - \Delta V = (l - \Delta l)^3 = (1 + \epsilon)^3 = 1 + 3 \times 1 \times \epsilon^2 + 3 \times 1^2 \times \epsilon + \epsilon^3 \approx 1 + 3\epsilon \Rightarrow \Delta V = -3\epsilon \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -3\epsilon \quad (10.1.1)$$

Ripercorrendo i passaggi senza abbattere gli infinitesimi di ordine superiore, l'espressione esatta della variazione relativa di volume $\Delta V/V$ è la seguente:

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\epsilon - 3\epsilon^2 - \epsilon^3 \quad (10.1.2)$$

Si ricorda che ΔV positivo corrisponde ad una diminuzione del volume iniziale, mentre ϵ positivo corrisponde ad un allungamento dello spigolo del cubo iniziale. Per queste ragioni, la formula (10.1.2) possiede i segni - davanti alle ϵ .

L'espressione (10.1.2) è nonlineare in ϵ , e quindi il suo impiego in elasticità comporterebbe il dover risolvere complesse equazioni nonlineari. Si preferisce quindi nella pratica impiegare l'approssimazione lineare (10.1.1) della formula (10.1.2). Tuttavia in certi casi si possono commettere errori anche notevoli impiegando la (10.1.1) al posto della (10.1.2).

Gli esempi seguenti sono relativi ad una tecnica particolare, proposta nella letteratura pertinente, di lettura fotoelastica delle tensioni in fotoelasticità tridimensionale congelata. È stato infatti proposto di leggere la parte idrostatica delle tensioni nel modello fotoelastico realizzato in resina, estraendo un cubetto di resina dalla zona dove si vogliono calcolare le tensioni. In tale cubetto rimangono congelate le tensioni, e quindi il suo volume corrisponde al volume deformato. Si distende poi il cubetto tramite un ciclo termico, per cui il cubetto si scarica, permettendo la misura del volume iniziale. Si calcola poi la variazione relativa di volume $\Delta V/V$, la si moltiplica per il Bulk Modulus K , ottenendo infine una misura della parte idrostatica delle tensioni. I dati riportati provengono in parte da una

discussione, estratta dalla bibliografia pertinente, sulla affidabilità della tecnica fotoelastica sopra descritta.

Si consideri dapprima un esempio puramente idrostatico, e si supponga che la deformazione volumetrica ε valga 0.01 . Allora:

$$\left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{approssimato}} = -3\varepsilon = -0.03$$

$$\left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{esatto}} = -3\varepsilon - 3\varepsilon^2 - \varepsilon^3 = -0.03 - 3 \times 0.01^2 - 0.01^3 = -0.0303$$

(10.1.3)

In questo caso l'errore relativo tra la formula esatta e quella approssimata è molto piccolo, per cui la (10.1.1) è sicuramente impiegabile.

Si consideri ora un esempio parzialmente idrostatico e parzialmente deviatorico, e cioè una trave in trazione semplice. Si attribuisce l'indice 1 delle tensioni e deformazioni principali alla direzione di applicazione del carico, e cioè alla direzione dell'asse della trave, e gli indici 2 e 3 alle direzioni trasversali. Si intende innanzitutto sviluppare una formula della variazione relativa di volume $\Delta V/V$, analoga alla (10.1.1), ma valida per ε_1 diverso da ε_2 e da ε_3 , dato che nella trave tesa le tre deformazioni principali non sono uguali tra loro. Si ha:

$$V - \Delta V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) =$$

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \approx$$

$$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \Rightarrow \Delta V = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

(10.1.4)

Siccome in una trave caricata lungo la direzione 1 si ha che $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, valgono le seguenti relazioni:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{\sigma_1}{E} \Rightarrow \sigma_1 = E \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)] = -\frac{\nu \sigma_1}{E} \Rightarrow \varepsilon_2 = -\nu \varepsilon_1$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] = -\frac{\nu \sigma_1}{E} \Rightarrow \varepsilon_3 = -\nu \varepsilon_1$$

(10.1.5)

Si consideri quindi una barra fotoelastica in trazione, con $\varepsilon_1 = 0.01$ e $\nu = 0.49$. Dalla (10.1.5) si ha che $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0.49 \times 0.01 = -0.0049$. Dalla (10.1.4) si ha:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{approssimato}} &= -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = -0.01 - (-0.0049) - (-0.0049) = -0.000198 \\ \left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{esatto}} &= -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \\ &= -0.01 - (-0.0049) - (-0.0049) - 0.01 \times (-0.0049) - (-0.0049) \times (-0.0049) - \\ &= (-0.0049) \times 0.01 - 0.01 \times (-0.0049) \times (-0.0049) = 0.000126 \end{aligned} \quad (10.1.6)$$

dove l'errore tra la variazione relativa di volume $\Delta V/V$ esatta ed approssimata è notevole in questa deformazione parzialmente idrostatica e parzialmente deviatorica.

Si consideri infine una barra fotoelastica in compressione, imponendo una deformazione negativa $\varepsilon_1 = -0.01$, con $\nu = 0.49$. Dalla (10.1.5) si ha che $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -0.49 \times -0.01 = 0.0049$. Dalla (10.1.4) si ha:

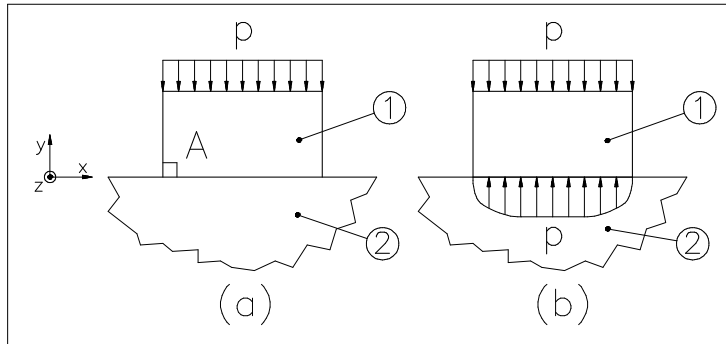


Figura 10.2.1

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{approssimato}} &= -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = -(-0.01) - 0.0049 - 0.0049 = -0.0198 \\ \left. \frac{\Delta V}{V} \right|_{\text{esatto}} &= -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_3 \varepsilon_1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \\ &= -(-0.01) - 0.0049 - 0.0049 - (-0.01) \times 0.0049 - 0.0049 \times (-0.01) - (-0.01) \times 0.0049 \times 0.0049 = 0.000126 \end{aligned} \quad (10.1.7)$$

dove l'errore tra la variazione relativa di volume $\Delta V/V$ esatta ed approssimata è notevole in questa deformazione parzialmente idrostatica e parzialmente deviatorica. Si noti inoltre che tale errore cambia sostanzialmente tra situazione trattive e compressive.

Si risolvano questi calcoli per $\nu = 0.3$, per chiarire se gli errori delle formule approssimate si riducono quando più ν si discosta dal valore di incomprimibilità 0.5.

10.2 Si consideri un rettangolo deformabile (1) incollato ad un basamento rigido (2), e schiacciato da una pressione p , Figura 10.2.1 (a). Si suppone per semplicità che il rettangolo lavori in stato di tensione piana. Si vuole esaminare la forma della pressione di contatto p tra rettangolo e basamento, Figura 10.2.1 (b).

Si osserva innanzitutto che, essendo il rettangolo incollato al basamento, il lato inferiore del rettangolo non può spostarsi in direzione x , per cui lo spostamento u_x rimane identicamente nullo lungo il lato inferiore del rettangolo. Ne consegue che anche la deformazione $\varepsilon_x = \partial u_x / \partial x$ si annulla lungo il lato inferiore del rettangolo. Si considera ora un quadrato elementare posto nello spigolo inferiore sinistro del rettangolo, punto A . La tensione σ_x si annulla perché il lato verticale del quadrato elementare giace lungo un bordo libero. La tensione σ_z è identicamente nulla perché si è supposto che il rettangolo lavori in tensione piana. Dalla legge di Hooke si deriva quindi:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0 \Rightarrow \sigma_x = \nu(\sigma_y + \sigma_z) = \nu\sigma_y = 0 \Rightarrow \sigma_y = 0 \quad (10.2.1)$$

da cui si deduce che la pressione di contatto p tra rettangolo e basamento si deve annullare alle estremità del contatto, come mostrato in Figura 10.2.1 (b).

Rifare i passaggi anche per il caso di rettangolo lavorante in deformazione piana.

10.3 Si consideri il tappeto dentato elastomerico di Figura 10.3.1 , impiegato con funzione antivibrante. Per esempio, tale tappeto viene posto sotto il basamento di macchine utensili, riducendo le vibrazioni. Si vuole

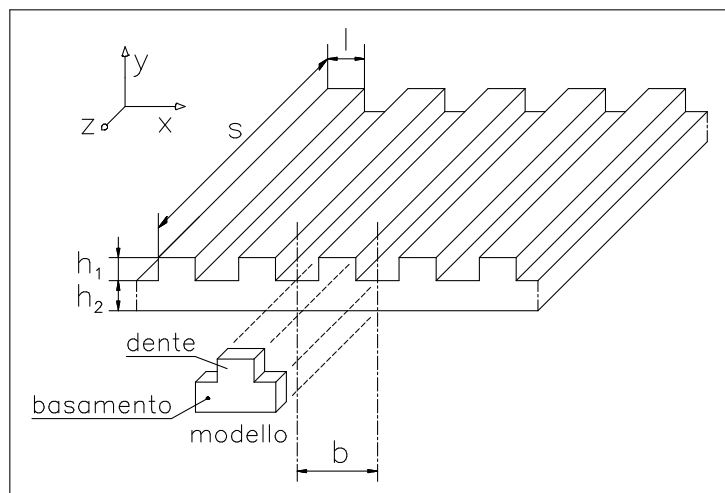


Figura 10.3.1

o di deformazione piana generalizzata. Si anticipa che la discussione del comportamento meccanico di questo componente è complessa, per cui risulta difficile arrivare a risultati definitivi.

I denti risultano schiacciati dal carico imposto, e sono caricati maggiormente del basamento, semplicemente perché i denti sono radi mentre il basamento è continuo. Quindi il basamento risulta sottocaricato rispetto ai denti, e può almeno parzialmente impedire ai denti di allargarsi in direzione z (vedi la Figura 10.3.1) promuovendo, almeno con certi proporzionamenti, uno stato piano di deformazione in direzione z . Perché però si instauri uno stato abbastanza prossimo ad uno stato piano di deformazione, occorre che i denti siano molto radi, che cioè il rapporto b/l sia molto elevato. I denti però diventerebbero troppo radi per una applicazione di interesse industriale. Se poi l'altezza h_1 dei denti fosse molto maggiore dell'altezza h_2 del basamento, i denti potrebbero allargarsi a piacimento in direzione z almeno nella loro zona più alta, e quindi i denti lavorerebbero vicino ad uno stato piano di tensione. Il contributo del basamento alla deformazione del tappeto diventerebbe trascurabile, e si potrebbe concludere che un modello in tensione piana è applicabile quando l'altezza dei denti è considerevole, e cioè quando h_1/h_2 è alto. Lo stato piano di tensione si instaurerebbe, però, per una geometria tecnicamente non interessante. Probabilmente, per una geometria del tappeto dentato di interesse industriale, il modello piano più vicino a quello tridimensionale è quello in deformazione piana generalizzata, modello coerente coll'ammettere che il tappeto dentato si allarghi in direzione z , ma che un qualunque piano iniziale x - y trasli in direzione z senza ingobbarsi. Questo

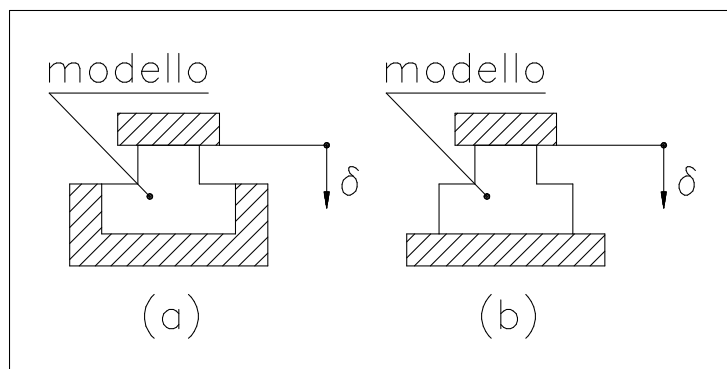


Figura 10.3.2

deformazione piana generalizzata, per cui risulta praticamente difficile sfruttare questa modellazione bi-dimensionale del problema tridimensionale iniziale.

Dalla Figura 10.3.1 emerge che, approfittando delle simmetrie, è possibile enucleare dal tappeto dentato un modello rappresentativo del comportamento meccanico dell'intero tappeto, modello che descrive un singolo dente ed una zona del basamento. Si presentano due analisi fotoelastiche estreme per questo modello, una in tensione piana, ed una in deformazione piana, ritenendo che il comportamento effettivo del dente debba essere compreso tra queste due schematizzazioni. Il modello è stato schiacciato come in Figura 10.3.2 . Più esattamente, si sono considerati due tipi di vincolamenti, il primo rappresentato in Figura 10.3.2 (a) , dove il basamento non può spostarsi in direzione x di Figura 10.3.1 , ed il secondo vincolamento in cui il basamento è libero di espandersi lungo x . Questi due diversi vincolamenti simulano due possibili situazioni pratiche del tappeto antivibrante, di potersi espandere in direzione x oppure di essere vincolato ai bordi, e quindi di non potersi espandere in direzione x .

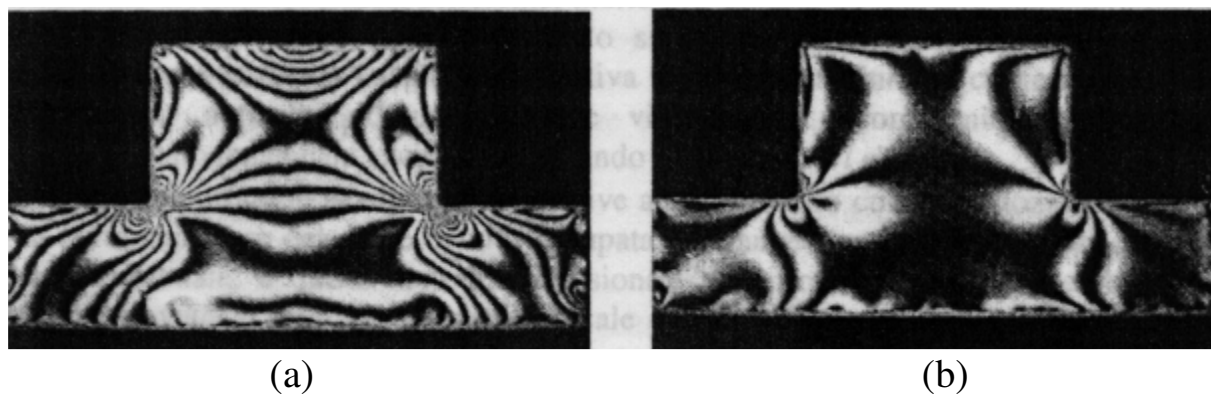


Figura 10.3.3

La Figura 10.3.3 presenta alcuni risultati dello studio fotoelastico per il modello. In particolare, la Figura 10.3.3 (a) mostra le frange isocromatiche per il modello in stato di deformazione piana, con vincoli

lateralmente imposti al basamento come in Figura 10.3.2 (a) , mentre la Figura 10.3.3 (b) mostra le isocromatiche per lo stesso modello con gli stessi vincoli, ma in stato di tensione piana. Emerge che l'andamento delle isocromatiche (non si presti per il momento attenzione al fatto che nel caso (a) le isocromatiche sono molto più fitte del caso (b)) è diverso nei due stati tensionali. Si esaminino in particolare le isocromatiche che partono dallo spigolo interno al raccordo tra dente e basamento, che possiedono andamenti chiaramente diversi negli stati di deformazione e di tensione piana. Questo risultato è in linea con l'enunciato del Teorema di Mitchell, Paragrafo 8 , dato che il dente è soggetto a condizioni al contorno sugli spostamenti e non sulle tensioni, e quindi lo stato tensionale non rimane lo stesso in tensione ed in deformazione piana.

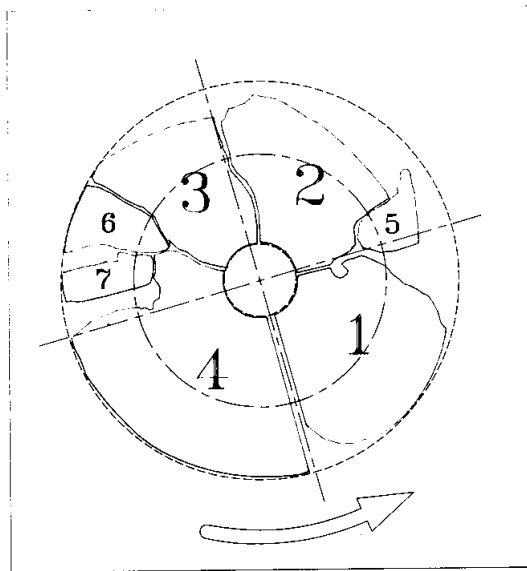


Figura 10.4.1

10.4 Un disco rotante, in seguito ad un fuori giri, esplode frammentandosi in un numero di settori in genere di analoga ampiezza angolare. Se il foro del disco è molto piccolo rispetto al raggio esterno, geometria incontrata per esempio nelle mole da taglio in resina, il disco si frantuma in tre o quattro settori principali, Figura 10.4.1 . Se invece il disco è caratterizzato da un basso ingombro radiale, aumenta il numero dei settori nei quali il disco si frammenta. La stima della massa dei frammenti, e quindi del loro numero, risulta utile per esempio per

dimensionare ad urto le cuffie di contenimento dei pezzi rotti del disco. Ciò premesso, il numero di settori in cui un disco rotante si frammenta dipende anche dal coefficiente di Poisson del materiale del disco?

Si osserva che, essendo i carichi inerziali, un disco rotante non ricade nelle condizioni di applicabilità del teorema di Mitchell, e di conseguenza lo stato tensionale dipende dal coefficiente di Poisson. Le fratture del disco durante la sua frammentazione si originano nelle zone nelle quali la tensione supera un certo valore critico, e quindi il numero dei settori in cui un disco si frantuma è anche funzione del coefficiente di Poisson, anche se l'informazione tecnica disponibile indica che tale dipendenza è modesta. In conclusione, dischi di eguale geometria metallici ed in resina potrebbero segmentarsi in un numero di settori (lievemente) diverso.



Francobollo commemorativo di Timoshenko

γ γ γ γ

Quando una persona del sesso che, secondo i nostri costumi e pregiudizi, deve incontrare difficoltà infinitamente superiori a quelli degli uomini per familiarizzarsi con queste spinose ricerche, riesce nondimeno a sormontare questi ostacoli ed a penetrare nelle loro parti più oscure, allora senza dubbio ella deve avere il più nobile coraggio, straordinari talenti e un genio superiore

Gauss, lettera a Sophie Germain

γ γ γ γ

11 Esercizi proposti di Teoria dell'Elasticità

11.1 Si consideri la seguente formulazione del Teorema di Mitchell, estratta da un testo di Analisi Sperimentale, e la si confronti con quella riportata nel Paragrafo 8 , evidenziando le sottili differenze. Nel paragonare le due formulazioni del Teorema di Mitchell, si presti particolare attenzione all'importanza delle condizioni al contorno.

For *plane elasticity* problems, some general guidelines [on the effects of Poisson's ratio] can be given. For plane-stress or plane-strain problems involving simply connected bodies (no holes in body) for which the body forces are zero or constant or vary linearly with position, the stress distribution is known to be independent of Poisson's ratio. Similar problems involving multiply connected bodies containing a hole or holes can also be modeled without regard to Poisson's ratio if the resultant force of the boundary of each hole is zero. It has also been shown that if there are unbalanced forces on internal boundaries, the stress is *linearly* related to Poisson's ratio. . . Nevertheless, for the more general three-dimensional problems, Poisson's ratio may be a significant factor and must be considered. There are no general rules in this case, and it must be left to the experience and knowledge of the experimenter to decide on the relative importance of this material property.

11.2 Si paragoni il Bulk Modulus nell'acciaio ed in un materiale elastomerico. In particolare, si calcoli per quale coefficiente di Poisson il Bulk Modulus in un elastomero caratterizzato da $E = 3 \text{ MPa}$ eguaglia il Bulk Modulus di un acciaio.

11.3 Si consideri una protesi d'anca dotata di strato elastomerico, e tramite il teorema di Mitchell si discuta in questo problema assialsimmetrico la dipendenza o meno dello stato tensionale nello strato elastomerico dalle costanti elastiche dell'elastomero.

11.4 Si consideri una protesi di geometria definita dai seguenti valori: $R_s = 15.875 \text{ mm}$, $R_e = 16.125 \text{ mm}$, $h = 3 \text{ mm}$. L'elastomero impiegato è un poliuretano virtualmente incompressibile con $E = 8.5 \text{ MPa}$. Il carico applicato è di 5 kN . Nel caso di cotile perfettamente emisferico, determinare se il contatto tra testina e strato elastomerico si estende sull'intera superficie emisferica, e cioè se tale contatto interessa anche il bordo del cotile. Tale indesiderata situazione provocherebbe una rapida usura dell'elastomero.

11.5 Si consideri lo stato tensionale rappresentato dal quadrato elementare di Figura 11.5.1 , in stato piano di tensione.

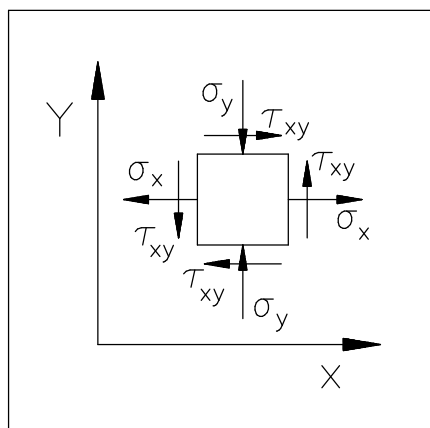


Figura 11.5.1

(11.5.1)

I valori delle tensioni sono: $\sigma_x = 12 \text{ MPa}$, $\sigma_y = -3 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 7 \text{ MPa}$. Disegnare a mano libera il corrispondente circolo di Mohr, e valutare di conseguenza le tensioni principali. Confrontare tali valori approssimati con quelli analitici esatti espressi dalla formula (si veda il Capitolo sulle Tensioni Ideali) :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$$

11.6 Si consideri la lastra forata soggetta a trazione di Figura 11.6.1 . Si discuta se le tensioni tangenziali τ per esempio sulle facce superiori dei due quadrati elementari *a* e *b* possiedono lo stesso segno oppure segni opposti, relativamente alle due convenzioni sul segno della tensione τ presentate nel Paragrafo 3.2 . Si confrontino anche i segni della τ sulle rimanenti coppie di facce.

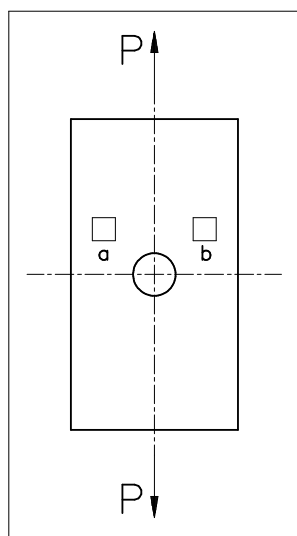


Figura 11.6.1

11.7 Il seguente problema è connesso con le tensioni in un dado compresso. Si consideri un cilindro cavo, compresso assialmente tra due piani infinitamente rigidi e senza attrito. Indicare se lo spostamento radiale del bordo del foro è centrifugo o centripeto, e trovare il legame analitico tra tale spostamento radiale e schiacciamento assiale del tubo.

11.8 In un certo tipo di problema, nella costruzione grafica le frecce devono essere disegnate punta contro coda, mentre in un altro tipo di problema le frecce devono essere punta contro punta e coda contro coda. Individuare questi due problemi.

11.9 Si consideri la Figura 11.9.1 , estratta da un testo di Meccanica della Frattura, e si interpreti quale fenomeno tale Figura intende illustrare. In particolare, si esamini il significato della zona di materiale confinata da una superficie cilindrica ideale disegnata in prossimità dell'apice dell'intaglio. Per meglio guidare il lettore, si riportano alcuni passi estratti dal testo sopracitato, relativi a tale Figura.

The stresses are high only in the vicinity of the notch root. . . . [If the plate is thick], a high tension develops in thickness direction when no contraction is permitted. This stress is exerted on the [material close to the notch tip] by surrounding material acting to constrain the [axial] contraction. . . It follows that at the surface . . there is plane stress. Further inward there is . . . plane strain.

Now consider a thin plate with a notch. Contraction can occur freely, [so that the plate is in] plane stress.

In [intermediate] cases, there will be some, but not complete constraint. These transitional cases have a triaxial state of stress, but not one of plane strain.

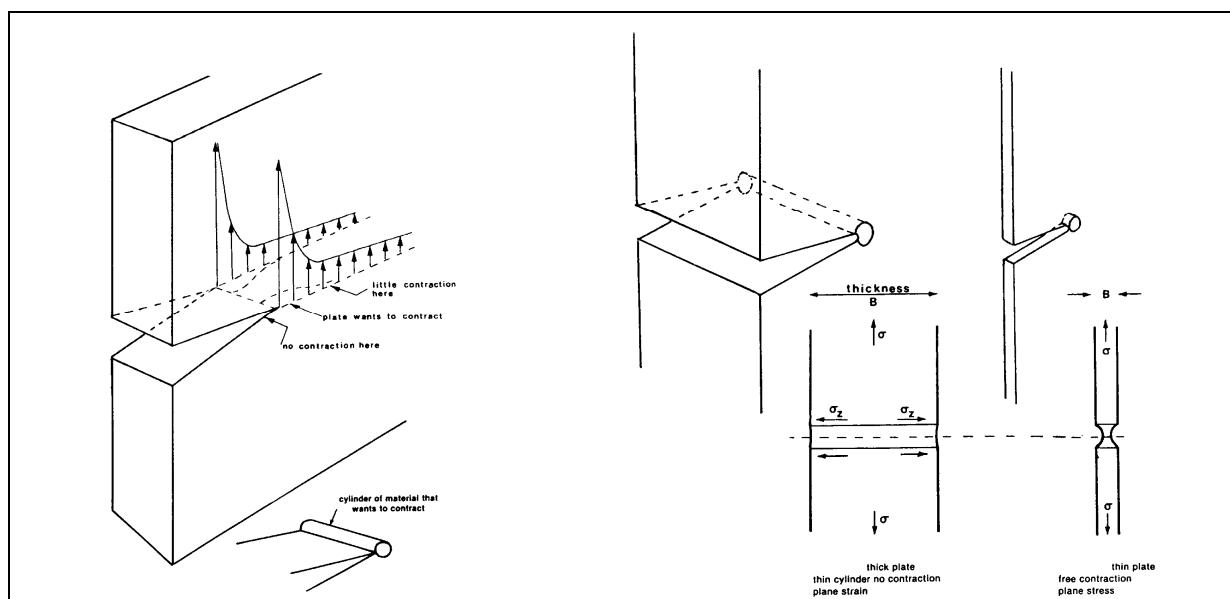


Figura 11.9.1

11.10 Per un materiale metallico si è misurato sperimentalmente un modulo di Young E di 270.000 MPa, ed un modulo G di 80.000 MPa. Questi valori delle due costanti elastiche sono tra loro coerenti, oppure si può ipotizzare un errore di lettura sperimentale?

11.11 Si considerino i nove stati tensionali di Figura 11.11.1, ognuno rappresentato tramite i tre cerchi di Mohr. Per tali nove stati indicare a) se la loro rappresentazione è corretta; b) qualora la rappresentazione abbia significato, quali sono i valori delle tre tensioni principali.

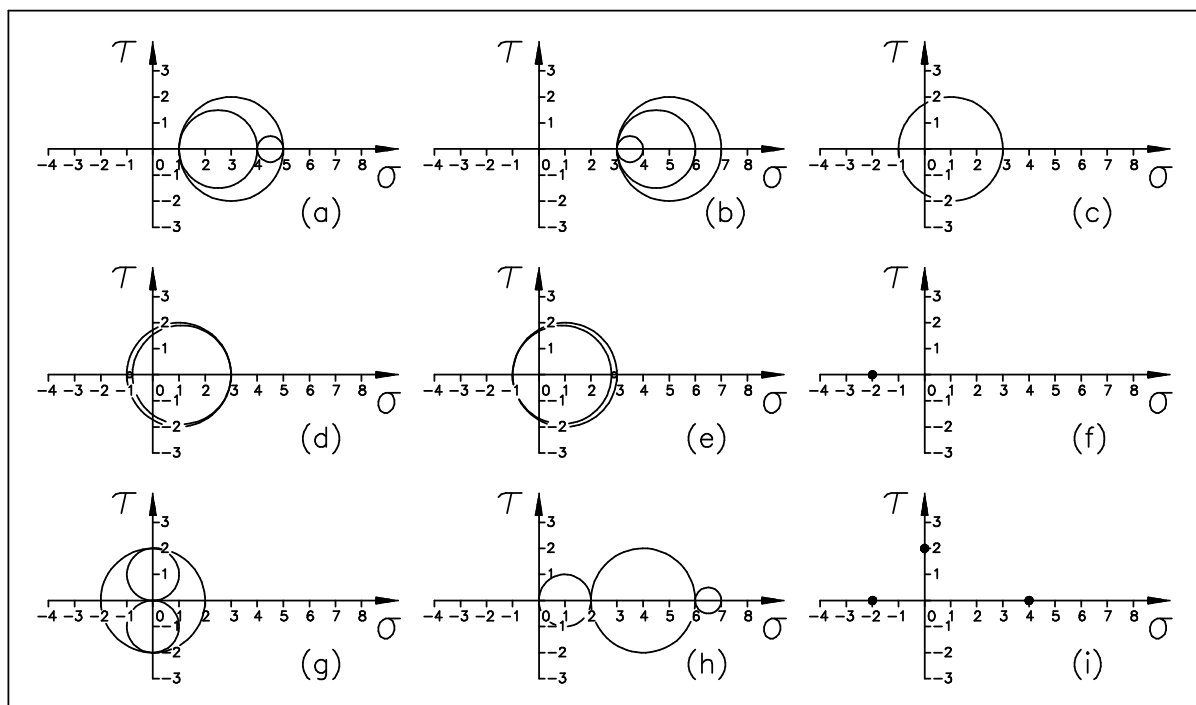


Figura 11.11.1

11.12 Si esamini la trave di Figura 11.12.1 (a), incastrata ad una estremità ed inflessa da un carico trasversale all'altra estremità. Si considerino tre diverse schematizzazioni della trave, vista come una trave monodimensionale puramente flessionale, Figura (b), come un solido bidimensionale, Figura (c), e come un solido tridimensionale, Figura (c).

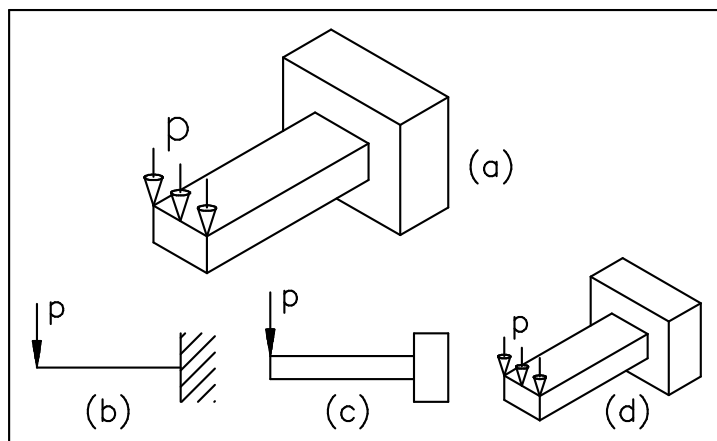


Figura 11.12.1

Tramite il teorema di Mitchell esaminare per i tre modelli la dipendenza dello stato tensionale dalle costanti elastiche.

11.13 La Figura 11.13.1 rappresenta un problema di contatto tra la superficie del corpo (1) e quella del corpo (2). Il corpo (1) è fisso, mentre il corpo (2) viene fatto strisciare sul corpo (2) imponendo una traslazione verso sinistra, come indicato dalla freccia. Il contatto produce nell'intorno del punto A del corpo (1) una tensione σ negativa (cioè compressiva) di - 4 MPa, agente sulla faccia *a* del quadrato elementare, mentre la tensione σ agente sulla faccia *b* appare trascurabile. (Il problema di contatto viene assunto piano, per cui si studiano soltanto le tensioni agenti sul piano del disegno.) Il valore stimato del coefficiente di attrito f è 0.25 . Discutere quali ulteriori tensioni, rispetto a quelle rappresentate sul quadrato elementare nell'intorno del punto A, nascono in seguito al moto relativo del corpo (2) rispetto ad (1). Una volta chiarito lo stato tensionale completo agente sul quadrato elementare in A, determinare le tensioni principali e le loro direzioni impiegando sia la tecnica grafica (circolo di Mohr) sia l'approccio analitico.

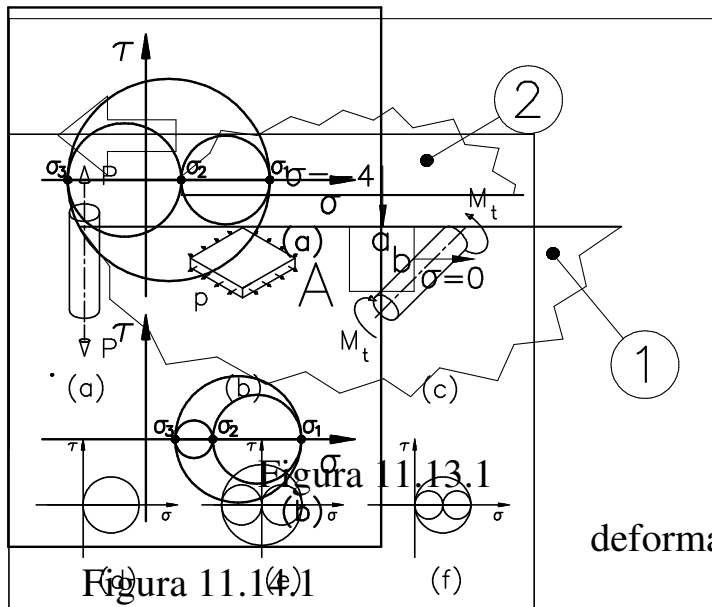


Figura 11.15.1

11.14 Si consideri uno stato di deformazione piana in un acciaio. Il piano di deformazione piana è definito dalla direzioni 1 e 2 , mentre la direzione 3 è perpendicolare al piano 1 - 2 . Discutere se i circoli di Mohr (a) e (b) possono rappresentare tale stato di deformazione piana.

11.15 Si considerino le tre semplici strutture di Figura 11.15.1 , e cioè (a)

una trave caricata da una forza di trazione P , (b) una lastra sottile soggetta lungo i quattro lati al carico distribuito trattivo p , e (c) una trave circolare sottoposta al momento torcente M_t . Determinare, per ognuna delle tre strutture (a), (b), (c), quale dei tre piani di Mohr (d), (e), (f) ne rappresenta lo stato tensionale.

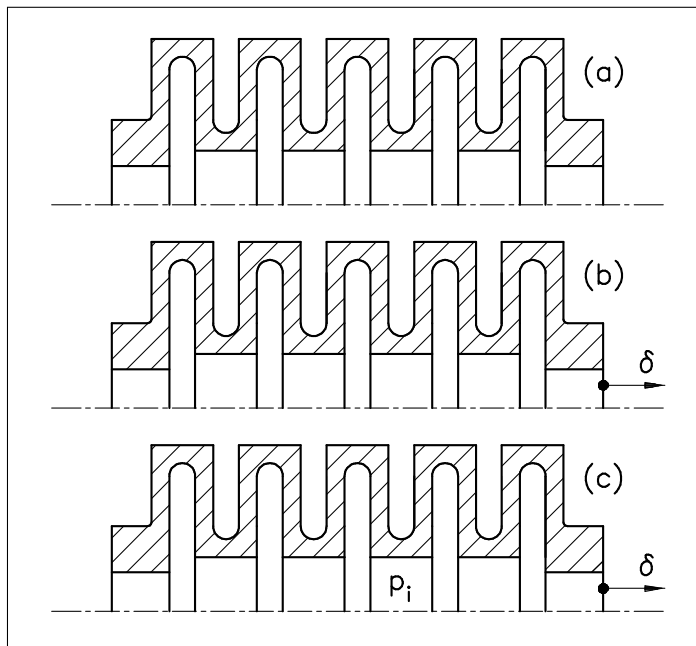


Figura 11.16.1

11.16 Si consideri il soffiutto dosatore per coloranti di Figura 11.16.1 , realizzato in materiale plastico. La Figura (a) mostra la geometria del soffiutto. La Figura (b) indica che al soffiutto viene imposto un allungamento assiale δ . La Figura (c) mostra che agli effetti dell'allungamento imposto δ si sovrappongono quelli dovuti alla pressione interna p_i .

Discutere se una modellazione piana di questo componente assialsimmetrico produce risultati più accurati quando viene imposto il solo allungamento δ , oppure quando viene applicata solo una pressione interna p_i .

∩ ∩ ∩ ∩

Mentre pertanto per i matematici il periodo del noviziato è transitorio, tanto che in molti giovani è visibile l'impazienza di emanciparsi da ogni scolastica soggezione, di liberarsi da tutto ciò che possa menomare la più completa libertà, si direbbe che la donna, negli studi più ardui, mai cessi di essere scolara, che la larva possa bensì raggiungere lo stato di crisalide, ma le siano vietati i liberi voli della farfalla.

Gino Loria, Donne matematiche

∩ ∩ ∩ ∩

12 Libri contenenti capitoli sulla Teoria dell'Elasticità

BROEK, D. (1993?). *The practical use of Fracture Mechanics*. Kluwer Academic Publishers, London.

HARVEY, J.F. (1974). *Theory and design of modern pressure vessels*. Van Nostrand Reinhold Company, N.Y.

JOHNSON, K.L. (1985). *Contact mechanics*. Cambridge University Press, Cambridge.

KOBAYASHI, A.S. (1993). *Handbook of experimental mechanics*. Society of Experimental Mechanics, N.Y.

LOVE, A.E.H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover, N.Y.

NORDIN, M., FRANKEL, V.H. (1989). *Basic biomechanics of the musculoskeletal system*. Lea & Febiger, London.

TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N. (1970). *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, N.Y.

TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill, N.Y.

YOUNG, W.C. (1989). *Roark's formulas for stress and strain*. McGraw-Hill, New York.

13 Articoli sulla Teoria dell'Elasticità

ASHWELL, D.G. (1950). *The anticlastic curvature of rectangular beams and plates*. J. Royal Aeronautical Soc. , November, pp.708-715 .

BAPAT, C. and BATRA, R.C. (1982). *Indentation of a viscoelastic rubber covered roll by a rigid plane surface*. Mechanics Research Communications, Vol. 9, pp.265-272.

JOHNSON, R.L. (1969). *Separation of principal stresses in the freezing method. Discussion*. Experimental Mechanics, September, p. 432 .

MITCHELL, J.H. (1899). *On the direct determination of stress in an elastic solid*. Proc. London Math. Soc., Vol. 31, p.100 .

SMITH, C.W. , McGOWAN,J.J. and JOLLES, M. (1976). *Effects of artificial cracks and Poisson's ratio upon photoelastic stress-intensity determination*. Experimental Mechanics, pp.188-193 .

SRAML, M. , POTRC, I (1997). *Comparison between standard and modern numerical design of nut and crane-hook at crane devices*. DMI 97, Slovenia, pp.279-286 .

SRINATH, L.S., ARADHYA, K.S.S., and SRINIVASA HURTHY, N. (1981). *On the influence of elastic constants on stresses near notch tips*. Mechanics Research Communications, Vol. 8(5), pp.287-295 .

∩ ∩ ∩ ∩

Sono esistite solo due donne matematiche nella storia, Sof'ja Kovalesskaja ed Emmy Noether. La prima però non era una matematica, la seconda non era una donna.

Hermann Weyl

∩ ∩ ∩ ∩

Lastra forata: quadratino, e ricerca qualitativa delle direzioni principali dalla deformata della lastra. Foto articolo deformata lastra con Molari.

Foto quadrato di gomma tirato lungo i due lati

Mettere che la tau si annulla sull'asse di simmetria, ma poi girare il cubetto di 45° e chiedere se la tau si annulla anche in questa posizione.

Fotoelasticità : convenzioni sulla tau

+Impaginare meglio dopo l'esercizio 11.9 , infilando un esercizio con testo breve.

+Manca l'esercizio 11.8

+Esempio elasticità Bariani: rettangolo con lato attaccato ad un supporto

+Esempi assialsimmetrici sul teorema di Mitchell.

+Citare articolo tappeto elastomerico De Bona

+Esempio denti Zanussi

+errore comprimibilità cubica Kuske

+lastra forata in trazione semplice. Due quadratini simmetrici ai lati del foro hanno la stessa tau, o questa ha segni opposti ?

+Esempio di circolo di Mohr fatto a mano: errore rispetto alle formule delle tensioni principali.

+Protesi d'anca: non è in deformazione piana. Effetto di ν !

+proporre il calcolo protesi con $h = 3$, vedendo se la testina tocca il bordo dello strato elastomerico

+Rottura del femore a becco di flauto

+Mettere il Bulk Modulus

+Cardine nel cubetto

+Dire nella protesi che $\epsilon_c > 0$, $\sigma_{amc} < 0$

+mettere in bibliografia libri il Timoshenko elasticità e piastre.

+Mettere in Mitchell gli esempi

+Segni nella legge di Hooke davanti a ν .

+Esercizi K : per $\nu = 0.49999$, e trovare il ν per cui k della gomma è quello dell'acciaio.

+Citare e criticare Timoshenko sui tubi che sono in deformazione piana
[*A plane strain condition occurs*] when the dimension of the body in the z direction is very large. There are many important problems of this kind, for instance, . . . a cylindrical tube with internal pressure . . .

Osservazioni al Paragrafo 3.3.1

Impieghi: rombo fotoelastico ? , molla ? , sforzo normale ?

+Anticipo sui diagrammi a mano dei tubi ?

+Segni tau fotoelasticità

+direzioni principali.

+Rotture a becco di flauto delle ossa

La deformazione del corpo dipende invece in modo inversamente proporzionale da E .

JOHNSON, R.L. (1969). *Separation of principal stresses in the freezing method. Discussion*. Experimental Mechanics, September, p. 432 .

errori del 70% $\nu_i = 0.49$ $\epsilon = 0.01$

SMITH, C.W. , McGOWAN,J.J. and JOLLES, M. (1976). *Effects of artificial cracks and Poisson's ratio upon photoelastic stress-intensity determination*. Experimental Mechanics, pp.188-193 .

+*The experimental determination of SIF [Stress Intensity Factor] for a plate containing a through crack is known to yield a higher result than the corresponding two-dimensional solution. The difference in SIF values is due to the fact that a constraint develops near the crack tip in the experiment since the plate thickness is much greater than the crack-root radius. This results in a state of nearly plane strain near the crack tip. At distances which are substantially larger than the thickness from the crack tip, a state of nearly generalized plane stress will result. As noted earlier, a zone of transition will exist between these extremes, resulting in a three-dimensional problem.*

Srinath,L.S., Aradhya,K.S.S., and Srinivasa Hurthy, N. (1981). On the influence of elastic constants on stresses near notch tips. Mechanics Research Communications, Vol. 8(5), pp.287-295 .

+*Experimental investigations revealed the beam models to be in a plane state of stress except very near the crack tip. . . . From the results obtained, it is observed that the influence of elastic constants (E and ν) are insignificant except at the notch tips.*

+*Si riportano alcune frasi sull'argomento di tensione e deformazione piana estratte da un testo autorevole di Teoria dell'Elasticità: If a thin plate is loaded by forces applied at the boundary, parallel to the plane of the plate and distributed uniformly over the thickness . . . the state of stress is called plane stress. If a long cylindrical or prismatic body is loaded by forces that are perpendicular to the longitudinal elements and do not vary along the length, [it undergoes a plane strain condition].*

- +Articolo Batra con rulli ricoperti di gomma
- +Deformazione piana generalizzata.
- +Riprendere l'esempio della gomma da cancellare, rapporto tra i due raggi di curvatura.
- +Inflessione dente : $1 - \nu^2$
- +Citazione libro Johnson sui contatti + articolo contatti $1 - \nu^2$
- +Esempio tesi Pilati sandwich

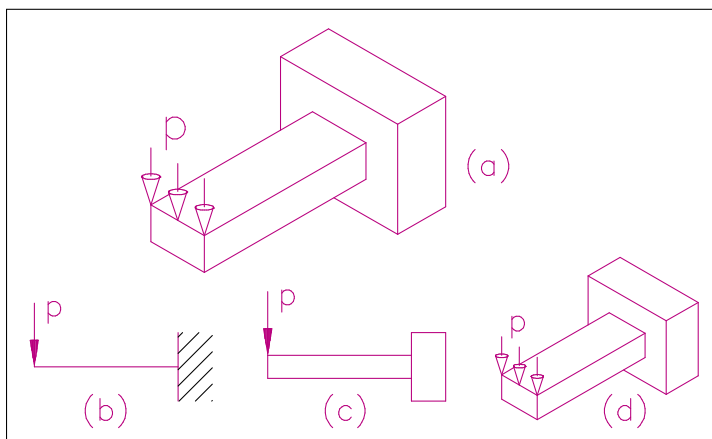
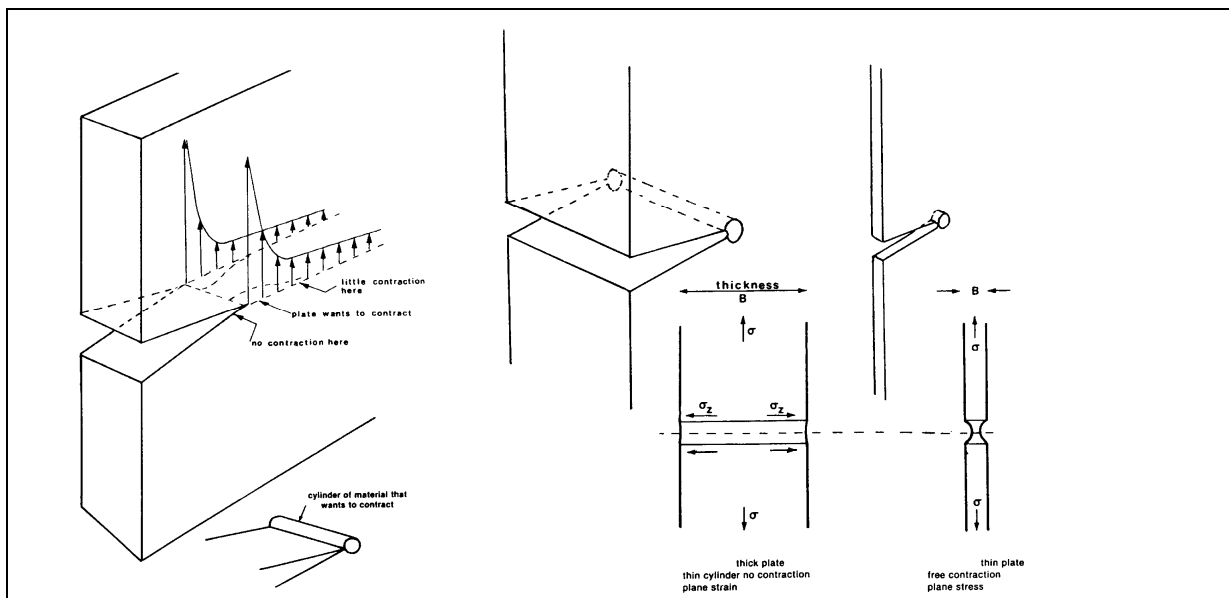


Figura 11.11.1