

ELEMENTI FINITI

1.1 Considerazioni generali

Gli Elementi Finiti sono un **metodo numerico** assai versatile per la soluzione approssimata di equazioni in genere differenziali. Con gli Elementi Finiti si possono risolvere problemi per esempio di fluidodinamica, problemi termici, elettrici, magnetici. Ci si limita in questo testo a considerare soltanto **problemi strutturali**, nei quali cioè gli Elementi Finiti vengono impiegati per analizzare le tensioni e le deformazioni in componenti meccanici.

Prevedere con rapidità, semplicità, ed economicità la deformata in un organo meccanico e le zone maggiormente tensionate senza dover ricorrere a costosi prototipi o a complicati modelli analitici, è stato da sempre il sogno del progettista meccanico. Egualmente utile risulta poi poter effettuare una analisi di sensibilità della struttura a variazioni di geometria e di costanti elastiche del materiale, perché in questo modo si può migliorare il comportamento meccanico dell'organo meccanico, fino ad ottimizzarlo. Per esempio, risulta utile prevedere in una biella automobilistica come variano le tensioni modificando i raggi di raccordo nella zona di passaggio tra piede di biella e fusto, oppure come cambiano in una protesi d'anca le pressioni di contatto al variare del gioco iniziale tra sfera sostitutiva della testa del femore e cavità che la accoglie, oppure modificando la scelta dei materiali impiegati.

Per stimare tensioni e deformazioni sono state sviluppate, soprattutto nell'ultimo secolo, varie tecniche analitiche che si trovano raggruppate nei testi di teoria dell'elasticità, alcune delle quali hanno saputo fornito affascinanti risultati esatti, applicabili soltanto però a geometrie ancora abbastanza semplici. Per esempio, si sono ottenute soluzioni analitiche esatte di tensioni e frecce in dischi caricati da forze radiali concentrate antipodali, in problemi di contatto tra un semipiano deformabile ed un indentatore rettangolare rigido, in recipienti in spessore sferici, ed in piastre circolari caricate e supportate assialsimmetricamente. Non risulta per il momento possibile ottenere soluzioni esatte dello stato tensionale e deformativo in geometrie complesse soggette a complicate condizioni al contorno, quali quelle incontrate nel corpo di una pompa ad ingranaggi, in una biella automobilistica, o nello stelo di una protesi d'anca.

Le tecniche sperimentali maggiormente impiegate sono la fotoelasticità e l'estensimetria. La fotoelasticità soffre del fatto di richiedere lunghi tempi sia di esecuzione che di elaborazione dei dati,

spesso non conciliabili con la necessità dell'Industria di ottenere informazione tecnica in tempi ristrettissimi. Gli estensimetri forniscono indicazioni veramente interessanti soltanto se essi vengono applicati esattamente nei punti di massimo tensionale, in genere inizialmente non noti.

Gli Elementi Finiti costituiscono una valida alternativa numerica agli approcci analitici e sperimentali. Essi non forniscono quasi mai una soluzione esatta, ma possono descrivere geometrie, vincoli e materiali anche molto complessi.

In questo testo ci si prefigge uno scopo limitato, quello di fornire una succinta introduzione, più su basi fisiche che matematiche, della tecnica numerica degli Elementi Finiti.

1.2 Presentazione riassuntiva

Si intende in questo Paragrafo riassumere gli aspetti generali della tecnica numerica degli Elementi Finiti, in modo da fornire allo studente una visione generale della teoria, preparandolo così ad una migliore comprensione del dettaglio teorico, presentato nei Paragrafi seguenti.

Si pensi ad una struttura continua schematizzabile come piana, quale un dente di un ingranaggio, caricato da una forza concentrata P che simula l'ingranamento del dente, Figura 1.2.1 (a) . Si concentra l'attenzione sul dente e sulla zona di incastro tra dente e ruota dentata, e non su tutta la ruota dentata, dato che il corpo della ruota risulta sottocaricato rispetto al dente stesso. Il dente viene supposto incastrato al corpo della ruota dentata.

La risoluzione analitica delle tensioni e deformazioni nel dente deve passare attraverso la soluzione delle equazioni differenziali di equilibrio. Siccome il calcolatore tratta essenzialmente numeri e non funzioni, è conveniente discretizzare il dente, e cioè sostituire al dente una struttura discontinua, formata per esempio da tante aste che si collegano in punti detti nodi, come in una struttura reticolare, un tipo di struttura impiegata per esempio nei pilastri a traliccio dell'alta tensione elettrica e nelle gru, Figura 1.2.1 (b) . Il calcolatore risolve con relativa facilità una struttura reticolare, dato che le equazioni che la descrivono sono per esempio le equazioni di equilibrio nodali, che sono algebriche e non differenziali. Si è infatti già notato che il calcolatore può trattare numeri e non funzioni, può cioè risolvere equazioni algebriche ma non equazioni differenziali. (Si consideri però la potenzialità sempre crescente dei programmi detti "manipolatori algebrici", che riescono a trattare le equazioni differenziali.)

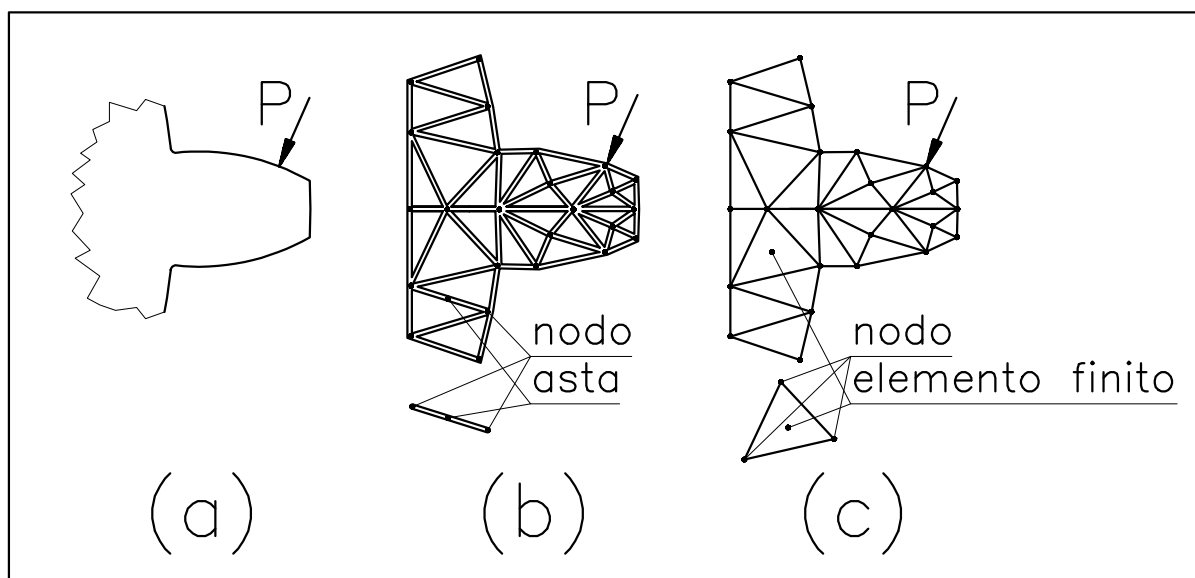


Figura 1.2.1

Occorre quindi sviluppare una opportuna teoria che chiarisca la regola da seguire nel discretizzare il dente, per fare in modo cioè che il dente reticolare si comporti, quanto a tensioni ed a deformazioni, quasi come il dente iniziale continuo. Se si individua questa regola, si riesce a sostituire alla struttura iniziale continua, che il calcolatore non può trattare, una struttura discretizzata, che il calcolatore risolve con relativa facilità. Tale regola di discretizzazione dovrà per esempio definire, una volta fissata la posizione delle aste della struttura discretizzata (resa cioè discontinua), quali sezioni dovranno avere le aste in modo che la struttura discontinua simuli al meglio quella continua iniziale.

Una volta chiarito questo meccanismo di discretizzazione, si riesce a costruire un sistema di equazioni algebriche che descrive la struttura, formato, come ogni sistema di equazioni algebriche, dal vettore dei termini noti, dalla matrice dei coefficienti, e dalle incognite. In questo modello strutturale reticolare, i termini noti possono essere le forze, che sono in genere note, pensate applicate ai nodi a cui convergono le varie aste, mentre le incognite sono gli spostamenti nodali, e la matrice dei coefficiente raggruppa coefficienti di influenza che permettono di rappresentare, per ogni riga del sistema di equazioni algebriche, l'equazione di equilibrio di forza nodale della struttura discretizzata, come illustrato nel seguito. I coefficienti di influenza vanno calcolati sviluppando una teoria che permetta di valutare il carico assiale nelle varie aste, in funzione degli spostamenti applicati alle due estremità di ogni asta.

Ritornando al significato fisico delle varie equazioni del sistema algebrico, la prima equazione rappresenta l'equilibrio di forze nodale del

nodo assunto come primo nodo, in direzione x . In altre parole, le componenti lungo x delle forze che le varie aste che convergono al primo nodo esercitano sul nodo stesso, devono equilibrare la componente lungo x dell'eventuale carico esterno applicato al primo nodo. La seconda equazione descrive l'equilibrio di forza nodale del primo nodo in direzione y . La terza equazione rappresenta l'equilibrio di forza nodale del nodo assunto come secondo nodo, in direzione x , e così via.

Così descritto, il problema strutturale è agli spostamenti, nel senso che **gli spostamenti costituiscono l'incognita primaria** del problema, in funzione dei quali vengono infatti descritte tutte le altre grandezze, ed in particolare le forze nelle aste. Le equazioni di equilibrio nodale sono quindi di fatto espresse in funzione degli spostamenti nodali, ancora incogniti, costituendo essi la variabile primaria.

Una volta calcolati gli spostamenti dei nodi tramite la risoluzione del sistema algebrico che esprime l'equilibrio di forza nodale, da essi si valutano le variazioni di lunghezza delle varie aste, e quindi le deformazioni assiali delle aste stesse, da cui si calcolano i carichi nelle varie aste. Questa catena di calcoli è analoga a quella impiegabile in una molla ad elica cilindrica per la quale, se la freccia f è nota, la forza di compressione F si deriva immediatamente moltiplicando la freccia per un coefficiente di deformabilità noto dalla teoria delle molle:

$$F = k f \quad \Rightarrow \quad F = \frac{G d^4}{64 R^3 n} f \quad (1.2.1)$$

dove i simboli impiegati nella (1.2.1) sono quelli del Capitolo sulle molle.

La struttura reticolare è stata così completamente risolta, in termini sia di spostamenti che di carichi.

La discretizzazione di tipo reticolare ad aste è stata qui introdotta perché la sua semplicità la rende didatticamente efficace, ma in realtà tale modellazione non si dimostra adatta a descrivere un componente strutturale continuo. Infatti in un organo meccanico continuo il materiale che in realtà esiste tra le maglie del modello reticolare irrigidisce di molto la struttura, funzione irrigidente non simulabile con un modello ad aste, e che non può essere ignorata. Occorre allora sviluppare una teoria di discretizzazione più avanzata di quella reticolare, appunto la teoria degli Elementi Finiti, nella quale il corpo continuo viene discretizzato non più attraverso semplici aste monodimensionali, ma tramite **elementi finiti** bidimensionali, per esempio **di geometria triangolare**, Figura 1.2.1 (c), nei quali però, a differenza delle maglie di una struttura reticolare, l'effetto irrigidente del materiale

interno ai lati del triangolo viene opportunamente considerato tramite un **approccio energetico**. Nella discretizzazione ad aste, lo stato tensionale nelle aste, siano esse tiranti o puntoni, è puramente di sforzo normale. Nella discretizzazione a triangoli, lo stato tensionale in ogni triangolo è bidimensionale completo, potendo esistere in esso sia tensioni normali orientate lungo x ed y , che tensioni taglianti. Risulta allora evidente che un modello agli elementi finiti è molto più aderente alla realtà di un modello reticolare.

I tre vertici di ogni elemento finito triangolare cadono su punti detti **nodi** della struttura, ed in ogni nodo possono convergere diversi elementi finiti. Nel seguito si parlerà indifferentemente dei tre vertici del triangolo, oppure dei tre nodi del triangolo.

Queste note introduttive chiariscono i vari passi in cui la teoria degli Elementi Finiti deve essere sviluppata.

Occorre innanzitutto discretizzare la struttura continua. Si parla di il/la **mesh**, meshatura, mesh-atura, discretizzazione.

Si parte dagli **spostamenti nodali**, che vanno intesi come incognite primarie, in funzione dei quali si calcoleranno tutte le altre grandezze, ed in particolare le forze che gli elementi finiti triangolari esercitano sui nodi.

Per valutare tali forze occorre calcolare, in funzione degli spostamenti nodali, le **deformazioni** all'interno di ogni elemento finito (le deformazioni si ottengono differenziando gli spostamenti), poi le **tensioni** (impiegando la legge di Hooke) ed infine, attraverso un approccio energetico, calcolare dalle tensioni le **forze** che il singolo elemento esercita ai vertici. Quest'ultimo passaggio è forse il più complesso, ma può essere approssimativamente chiarito tramite l'analogia dell'elemento finito triangolare con una molla. Se di una molla si conosce la tensione tagliente torsionale nella spira e la completa geometria della molla, si può calcolare la forza di compressione P della molla stessa:

$$\tau = \frac{16 P R}{\pi d^3} \psi \Rightarrow P = \frac{\pi d^3}{16 R} \frac{\tau}{\psi} \quad (1.2.2)$$

Similmente, se nell'elemento finito triangolare si conoscono le tensioni presenti al suo interno, si possono calcolare le forze applicate ai vertici del triangolo che generano tali tensioni.

In un problema piano, ogni nodo possiede due gradi di libertà, lungo x e lungo y (siccome il nodo è puntiforme, non si considera il grado di libertà di rotazione, dato che non si riesce a considerare la rotazione di un punto), e siccome un triangolo ha tre vertici che arrivano ai nodi della struttura, esso possiede sei gradi di libertà, nel senso che gli si possono imporre sei spostamenti δ_i , $i = 1, 6$, due spostamenti, lungo x ed y , per ogni vertice. Similmente, le forze nodali applicabili ad ogni vertice sono due, lungo x ed y , per cui le forze applicabili ad un triangolo, con tre vertici, sono sei, F_i , $i = 1, 6$. L'analogo del coefficiente k della (1.2.1) è quindi una matrice 6×6 , detta **matrice di rigidezza dell'elemento finito**:

$$F = k f \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (1.2.3)$$

L'elemento finito triangolare può di conseguenza essere interpretato come una specie di molla pluridimensionale, una supermolla a sei dimensioni, nel senso che sei spostamenti ai vertici del triangolo sono collegati a sei forze ai vertici.

Se la struttura discretizzata è per esempio formata da 120 nodi e da 110 elementi, i gradi di libertà dell'intera struttura sono $120 \times 2 = 240$ (due gradi di libertà per ogni nodo), e quindi la **matrice di rigidezza della struttura** è una 240×240 . I termini noti sono le 240 forze nodali, mentre le incognite sono i 240 spostamenti nodali. Occorre che ogni equazione del sistema di 240 equazioni algebriche esprima l'equilibrio, alternativamente lungo x e lungo y , delle forze nodali. Questo avviene se i $66 = 36$ elementi della matrice di rigidezza di ognuno dei 110 elementi finiti vengono allocati correttamente nella matrice di rigidezza 240×240 della struttura. Tale regola di allocazione si chiama **assemblaggio** (della matrice di rigidezza della struttura a partire dalle matrici di rigidezza degli elementi).

Si ottiene così un sistema di equazioni algebriche simile a quello della discretizzazione reticolare, dove i termini noti sono le forze applicate ai nodi, che sono in genere conosciute, mentre le incognite sono gli spostamenti nodali (le incognite primarie), e dove la matrice dei

coefficienti, la matrice di rigidezza, raggruppa i coefficienti di influenza, in modo che ogni riga del sistema di equazioni algebriche rappresenti un equilibrio di forza nodale.

Una volta calcolati gli spostamenti nodali (incognite primarie) per tutti i nodi della struttura, si valutano le tensioni all'interno di ogni elemento finito. Infatti le tensioni sono spesso più interessanti delle frecce nella progettazione meccanica. Si procede similmente a quanto accennato per la discretizzazione ad aste. Si valutano le deformazioni all'interno di ogni elemento, differenziando gli spostamenti. Si determinano infine le tensioni dalla legge di Hooke.

Si conclude questo Paragrafo con un'ultima osservazione. Si nota che **alcune parti** della teoria degli Elementi Finiti **vengono sviluppate a livello di nodi, mentre altre parti sono ancorate agli elementi**. Per esempio, le equazioni di equilibrio sono nodali, mentre le matrici di rigidezza sono calcolate per gli elementi.

No one believes in experimental data except the man who takes them. But everyone believes in the results of theoretical analysis except the man who gets them.

Da un corso Luchsinger

2 Teoria degli elementi finiti triangolari

Si considerano per semplicità soltanto elementi finiti piani triangolari a tre nodi, in campo elastico lineare. Si segue nell'esposizione lo schema individuato nel Paragrafo 1.2 .

2.1 Il campo di spostamenti nell'elemento finito triangolare

Gli spostamenti applicabili ai tre vertici dell'elemento finito triangolare, che convergono ai tre nodi, sono due per ogni nodo, lungo x e lungo y , e quindi complessivamente sono sei spostamenti nodali. Il vettore dei sei spostamenti nodali viene indicato con δ , mentre i singoli spostamenti dei tre vertici (nodi) del triangolo, i, j, k , che vanno presi in senso antiorario per ragioni ancorate al calcolo dell'area del triangolo, sono indicati con $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$, Figura 2.1.1 (a) :

$$\delta = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad \delta_1 = u_i ; \delta_2 = v_i ; \delta_3 = u_j ; \delta_4 = v_j ; \delta_5 = u_k ; \delta_6 = v_k$$

(2.1.1)

I sei spostamenti nodali costituiscono le variabili primarie, nel senso che da esse vengono derivate tutte le altre incognite. In particolare, si derivano da essi le forze nodali, che servono per esprimere le equazioni di equilibrio, equazioni che quindi sono di fatto espresse in funzione degli spostamenti.

Per derivare le forze nodali dagli spostamenti, non basta conoscere gli spostamenti nodali, cioè gli spostamenti ai vertici dei triangoli, ma occorre anche conoscere il campo di spostamenti all'interno dei triangoli stessi. Infatti, come meglio si vedrà nel Paragrafo 2.4 , le forze nodali associate a particolari spostamenti nodali devono soddisfare la proprietà di produrre, quando applicate ai vertici del triangolo, uno stato tensionale su tutto il triangolo, e quindi sia ai vertici che nei punti interni, il più possibile

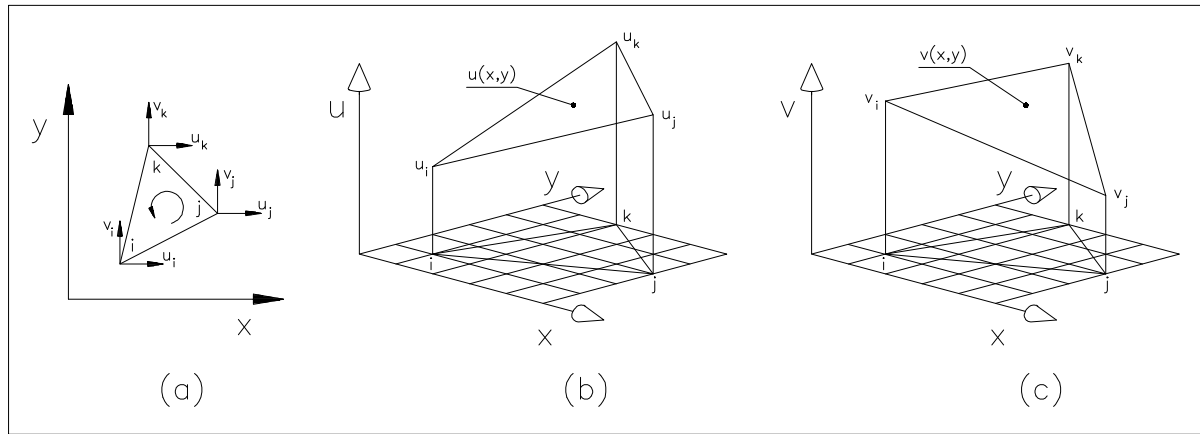


Figura 2.1.1

coerente con lo stato deformativo associato agli spostamenti nodali. Occorre quindi che risultino definite in tutti i punti del triangolo le deformazioni associate agli spostamenti nodali, e quindi è necessario che venga definito il campo di spostamenti su tutto il triangolo, dal quale si possono derivare le deformazioni tramite differenziazione.

Si concentri l'attenzione sui tre spostamenti nodali lungo x , e cioè u_i , u_j , u_k , dove i tre indici i, j, k denotano i tre vertici dell'elemento finito triangolare. Lo spostamento lungo x in un punto interno all'elemento finito triangolare può ragionevolmente venire assunto come lineare, e tale che assuma ai tre nodi i tre valori degli spostamenti nodali. La stessa interpolazione lineare può essere assunta per la componente di spostamento lungo y :

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Le espressioni (2.1.2) rappresentano interpolanti lineari complete in x e y , in quanto sono presenti sia i termini costanti 1 ed 4, che i due termini lineari in x ed in y per ogni equazione, Figure 2.1.1 (b) e (c). Questa scelta delle funzioni interpolanti degli spostamenti, lineari complete in x ed in y , è coerente con i gradi di libertà dell'elemento finito triangolare. Infatti si è già notato che al triangolo possono essere imposti sei spostamenti nodali, due, lungo x ed y , per ogni nodo. Occorre quindi che le due funzioni di spostamento, lungo x e lungo y , siano definite a meno di sei coefficienti incogniti, appunto le sei costanti α_i delle (2.1.2).

Non si è ancora imposto nelle (2.1.2) che le componenti di spostamento u e v assumano i valori nodali $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k$, quando x ed y assumono i valori delle coordinate nodali, $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k$. Le

seguenti equazioni esprimono tali imposizioni, dove le incognite sono le sei costanti i :

$$\begin{aligned}
 u(x_i, y_i) &= u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\
 v(x_i, y_i) &= v_i = \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
 u(x_j, y_j) &= u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\
 v(x_j, y_j) &= v_j = \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
 u(x_k, y_k) &= u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\
 v(x_k, y_k) &= v_k = \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k
 \end{aligned}
 \tag{2.1.3}$$

Risolvendo il sistema (2.1.3) in termini delle sei incognite i , tramite per esempio un manipolatore algebrico, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{u_i (x_j y_k - x_k y_j) + u_j (x_k y_i - x_i y_k) + u_k (x_i y_j - x_j y_i)}{2 A} \\
 \alpha_2 &= \frac{u_i (y_j - y_k) + u_j (y_k - y_i) + u_k (y_i - y_j)}{2 A} \\
 \alpha_3 &= \frac{u_i (x_k - x_j) + u_j (x_i - x_k) + u_k (x_j - x_i)}{2 A} \\
 \alpha_4 &= \frac{v_i (x_j y_k - x_k y_j) + v_j (x_k y_i - x_i y_k) + v_k (x_i y_j - x_j y_i)}{2 A} \\
 \alpha_5 &= \frac{v_i (y_j - y_k) + v_j (y_k - y_i) + v_k (y_i - y_j)}{2 A} \\
 \alpha_6 &= \frac{v_i (x_k - x_j) + v_j (x_i - x_k) + v_k (x_j - x_i)}{2 A}
 \end{aligned}
 \tag{2.1.4}$$

dove A rappresenta l'area dell'elemento finito triangolare, e vale:

$$A = \frac{1}{2} (x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_j y_i - x_k y_j)
 \tag{2.1.5}$$

Error! Bookmark not defined.

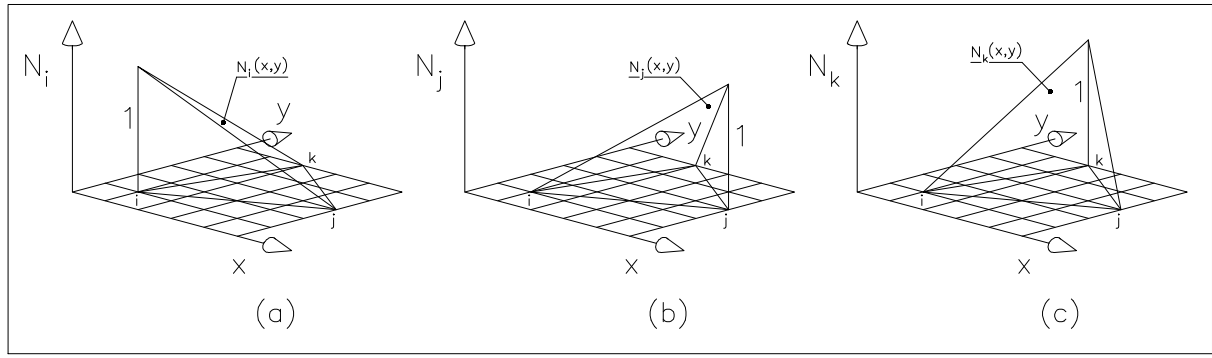


Figura 2.1.2

Tale area risulta positiva, come richiesto dalla fisicità del problema, soltanto se i tre indici i, j, k che denotano i tre vertici dell'elemento finito triangolare girano in senso antiorario.

La formulazione (2.1.2) del campo di spostamenti $u(x,y)$ e $v(x,y)$ può essere sviluppata in un modo equivalente, ma matematicamente più interessante. Secondo questo approccio, il campo di spostamenti si scrive nel modo seguente:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= N_i(x,y) u_i + N_j(x,y) u_j + N_k(x,y) u_k \\ v(x,y) &= N_i(x,y) v_i + N_j(x,y) v_j + N_k(x,y) v_k \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

dove le tre funzioni N_i sono dette funzioni di forma, ed possiedono la proprietà che valgono 1 nel nodo i -esimo, 0 nei nodi j -esimo e k -esimo, e sono polinomi del grado coerente con i gradi di libertà dell'elemento. Nel caso di elementi finito triangolare, si è già visto che il polinomio corretto è quello lineare completo. La Figura 2.1.2 presenta una rappresentazione grafica delle funzioni di forma N_i, N_j, N_k .

Con l'aiuto di un manipolatore algebrico si possono determinare le tre funzioni di forma N_i :

$$N_i(x,y) = \frac{1}{2A} [x_k y_j - x_j y_k + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y]$$

$$N_j(x,y) = \frac{1}{2A} [x_i y_k - x_k y_i + (y_i - y_k)x + (x_k - x_i)y]$$

$$N_k(x,y) = \frac{1}{2A} [x_j y_i - x_i y_j + (y_j - y_i)x + (x_i - x_j)y]$$

(2.1.7)

dove A indica ancora l'area dell'elemento triangolare.

Il campo di spostamenti descritto dalle espressioni (2.1.2) tenendo conto dei valori delle costanti i coincide perfettamente col campo di spostamenti descritto dalle (2.1.6). Infatti, in entrambe le descrizioni i polinomi che esprimono il campo di spostamento sono lineari completi, ed in entrambe le descrizioni, tali campi di spostamento eguagliano gli spostamenti nodali quando le coordinate x e y assumono i valori delle coordinate nodali.

2.1.1 Cenni sul campo di spostamenti in un elemento finito quadrilatero

Si accenna in questo Paragrafo al campo di spostamenti in un elemento finito quadrilatero, per far comprendere i problemi che si incontrano quando si estende la funzione degli spostamenti da un elemento finito triangolare ad elementi finiti a più alti gradi di libertà.

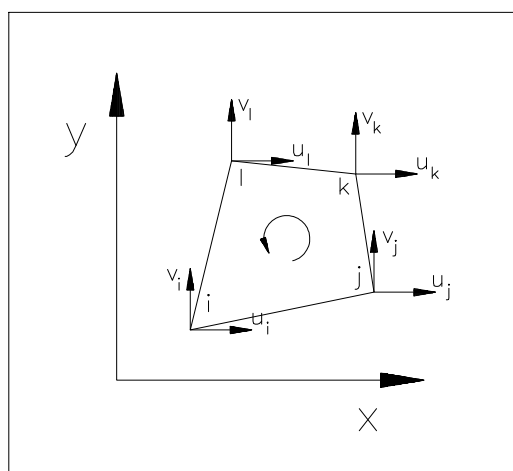


Figura 2.1.1.1

Si nota innanzitutto che i gradi di libertà di un elemento finito quadrilatero sono otto, dato che tale elemento ha quattro vertici, indicati in Figura 2.1.1.1 con gli indici i, j, k, l , ed ogni vertice possiede due gradi di libertà. Occorre allora scrivere le funzioni polinomiali in x ed in y delle componenti di spostamento u e v , complessivamente in funzione di otto coefficienti incogniti i . Sei coefficienti complessivi esauriscono la descrizione completa lineare in x ed in y degli spostamenti in u ed in v . A

questi sei coefficienti i vanno quindi aggiunti due ulteriori coefficienti, uno per la descrizione della componente di spostamento u ed uno per v , che parzialmente rappresentano componenti quadratiche degli spostamenti. Sono proponibili tre diverse espressioni quadratiche, da aggiungersi alla rappresentazione lineare completa, per descrivere la componente u dello spostamento:

$$\alpha x^2 \quad ; \quad \alpha y^2 \quad ; \quad \alpha x y \quad (2.1.1.1)$$

Coerentemente, la descrizione della componente u dello spostamento può assumere tre forme diverse:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 \\ u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 y^2 \\ u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \end{aligned} \quad (2.1.1.2)$$

Accettato il fatto che non si riesce, in un elemento finito a quattro nodi, ad esprimere le componenti di spostamento u e v in funzione di polinomi completi del secondo ordine, la descrizione migliore è l'ultima delle (2.1.1.2), dato che la funzione dello spostamento u è bilanciata in x ed in y , e quindi è egualmente duttile nelle due direzioni x ed y . Di conseguenza, la forma completa del campo degli spostamenti in u ed in v è:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (2.1.1.3)$$

Queste espressioni dipendono da otto coefficienti incogniti α_i , i quali vanno determinati, come per l'elemento triangolare, in modo che le componenti di spostamento u e v assumano i valori nodali $u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k, u_l, v_l$, quando x ed y assumono i valori delle coordinate nodali, $x_i, y_i, x_j, y_j, x_k, y_k, x_l, y_l$.

Si accenna infine al fatto che le deformazioni all'interno di un elemento quadrato, diversamente dall'elemento triangolare, non sono più costanti, e così le tensioni.

Un elemento finito sviluppato in questo modo presenta però seri limiti, evidenziati nell'esercizio 5.12. Gli elementi finiti isoparametrici, per i quali si rimanda a testi specialistici, permettono di superare tali limiti.

2.2 Le deformazioni nell'elemento finito triangolare

Il campo di spostamenti all'interno di un generico elemento finito è stato espresso in funzione degli spostamenti nodali. Le deformazioni all'interno di ogni elemento finito si calcolano differenziando il campo di spostamenti. Impiegando per esempio la descrizione degli spostamenti fornita dalle (2.1.2), e ricordando le (2.1.4), si ottiene:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[u_i (y_j - y_k) + u_j (y_k - y_i) + u_k (y_i - y_j) \right] = \\
&\frac{1}{2A} \left[\delta_1 (y_j - y_k) + \delta_3 (y_k - y_i) + \delta_5 (y_i - y_j) \right] \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_6 = \frac{1}{2A} \left[v_i (x_k - x_j) + v_j (x_i - x_k) + v_k (x_j - x_i) \right] = \\
&\frac{1}{2A} \left[\delta_2 (x_k - x_j) + \delta_4 (x_i - x_k) + \delta_6 (x_j - x_i) \right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha_3 + \alpha_5 = \\
&\frac{1}{2A} \left[u_i (x_k - x_j) + v_i (y_j - y_k) + u_j (x_i - x_k) + v_j (y_k - y_i) + u_k (x_j - x_i) + v_k (y_i - y_j) \right] = \\
&\frac{1}{2A} \left[\delta_1 (x_k - x_j) + \delta_2 (y_j - y_k) + \delta_3 (x_i - x_k) + \delta_4 (y_k - y_i) + \delta_5 (x_j - x_i) + \delta_6 (y_i - y_j) \right]
\end{aligned}
\tag{2.2.1}$$

Si nota che, nelle espressioni delle deformazioni, tra le sei costanti δ_i , non compaiono le costanti δ_1 ed δ_4 . Infatti, tali costanti rappresentano **moti di corpo rigido**, come appare dalle (2.1.2), e tali moti non producono deformazioni.

Le relazioni (2.2.1) possono essere descritte in modo compatto per via matriciale:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix}
\tag{2.2.2}$$

o, in modo riassuntivo:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}
\tag{2.2.3}$$

dove \mathbf{B} è una matrice 3x6 che descrive un operatore differenziale, nel senso che gli spostamenti vengono differenziati a fornire le deformazioni. Il vettore $\boldsymbol{\delta}$ raggruppa le **deformazioni** cosiddette "**generalizzate**", nel senso che questo vettore è formato dalla ε_x e dalla ε_y , che sono deformazioni, e dalla γ_{xy} , che non è strettamente una deformazione, bensì uno scorrimento.

Error! Bookmark not defined.

Si osserva che le **deformazioni all'interno dell'elemento triangolare sono costanti**, dato che la derivata di una funzione lineare, la funzione degli spostamenti, è una costante. Questa proprietà rende la teoria degli elementi finiti triangolari particolarmente semplice, e quindi didatticamente efficace. Tuttavia, gli elementi finiti triangolari, proprio perché lo stato deformativo e quindi tensionale è costante al loro interno, non riescono a descrivere con accuratezza gradienti di tensioni molto forti, quali quelli in prossimità di raggi di raccordo ridotti, di cave, di spallamenti, e quindi forniscono risultati più approssimati di altri elementi finiti teoricamente più duttili, per esempio elementi a quattro o ad otto nodi.

Agli esami gli sciocchi fanno spesso domande a cui i saggi non sanno rispondere.

Oscar Wilde

2.3 Le tensioni nell'elemento finito triangolare

Assumendo che il componente meccanico lavori in elasticità lineare, le tensioni all'interno dell'elemento finito triangolare si ottengono dalle deformazioni attraverso la legge di Hooke. Assumendo uno stato di tensione piana, le tensioni nel piano delle tensioni valgono, vedi il Capitolo di Richiami di Teoria dell'Elasticità:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \quad ; \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \quad ; \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} \quad (2.3.1)$$

Le espressioni (2.3.1) possono essere riscritte in forma matriciale compatta come:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = D \epsilon = D B \delta \quad (2.3.2)$$

dove la matrice D contiene le costanti elastiche E e ν , ed esprime la legge di Hooke.

Anche **le tensioni**, come le deformazioni, **rimangono costanti all'interno dell'elemento finito triangolare**, dato che le tensioni si ricavano dalle deformazioni, moltiplicandole per le costanti elastiche.

Si noti infine che il vettore raggruppa le **tensioni** cosiddette "**generalizzate**", nel senso che questo vettore è formato dalla σ_x e dalla σ_y , che sono tensioni normali, cioè del tipo σ , e dalla τ_{xy} , che non è una tensione normale σ , bensì una tensione tangenziale τ .

2.4 Le forze nodali equivalenti e la matrice di rigidezza nell'elemento finito triangolare

Nello schema teorico individuato nel Paragrafo 1.2 , occorre individuare le sei forze che l'elemento finito triangolare esercita ai tre nodi, in funzione dei sei spostamenti nodali, Figura 2.4.1 . Questo legame tra i sei spostamenti nodali e le sei forze nodali è indispensabile per imporre l'equilibrio di forza nodale, per esprimere cioè che un nodo generico della struttura è in equilibrio sotto le forze ad esso impartite dagli elementi finiti che toccano quel nodo, e sotto l'effetto di eventuali forze esterne applicate a quel nodo.

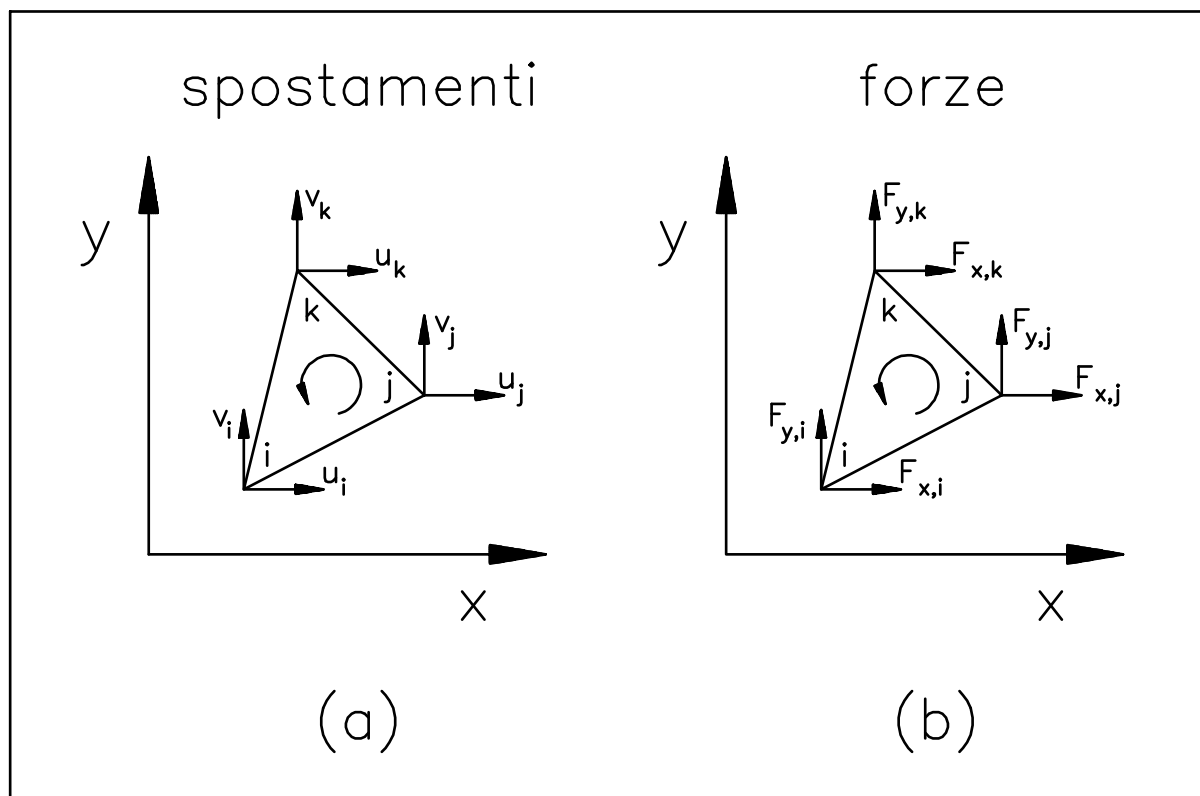


Figura 2.4.1

Si riprende il paragone tra elemento finito e molla. Se in una molla di geometria e di materiale noti si conosce la freccia, è immediato calcolare la forza di schiacciamento della molla. Si potrebbe sperare che anche nell'elemento finito, noti la sua geometria ed il materiale, risultasse immediato calcolare, dagli spostamenti imposti ai nodi, le forze nodali che producono tali spostamenti. Purtroppo nel caso dell'elemento finito tale calcolo delle forze nodali a partire dagli spostamenti nodali è tutt'altro che ovvio. Le maggiori difficoltà derivano dal fatto che la teoria degli elementi

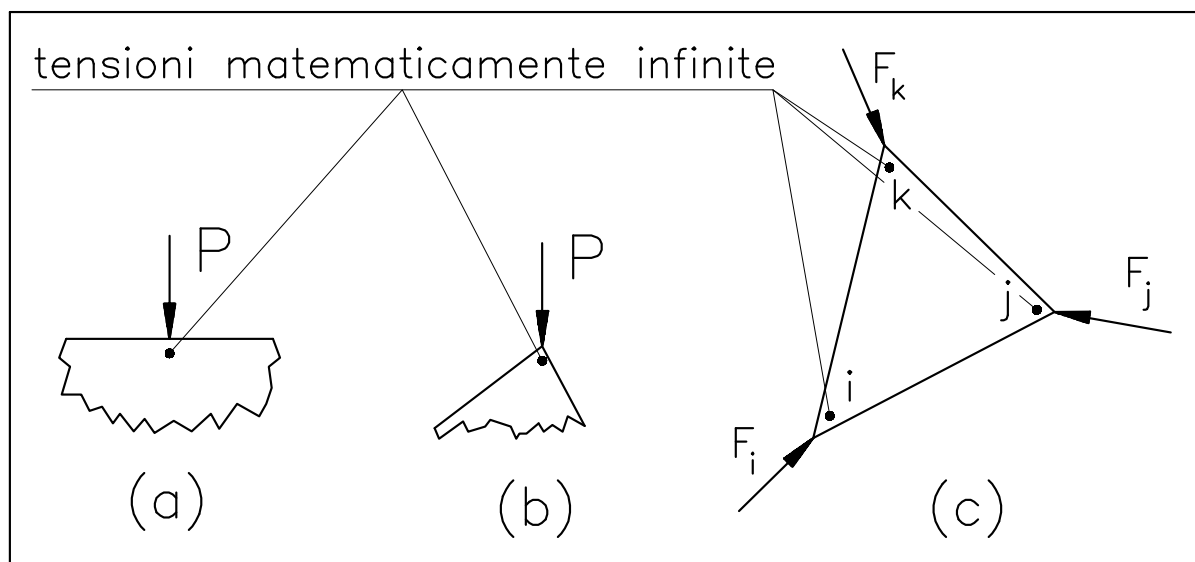


Figura 2.4.2

finiti, almeno in questa esposizione semplificata, prevede forze concentrate ai nodi che, se applicate ad un modello analitico esatto di un corpo triangolare, producono uno stato tensionale complesso all'interno del triangolo, con tensioni matematicamente infinite ai tre vertici del triangolo, ai quali le forze concentrate sono pensate applicate, e forti gradienti tensionali nell'intorno dei vertici stessi, Figura 2.4.2 (c) . Tale campo tensionale è analogo a quello in un semipiano elastico caricato da una forza concentrata trasversale, Figura 2.4.2 (a) , o ad un cuneo caricato al vertice, Figura 2.4.2 (b) . Il modello a cuneo è stato già considerato nel Capitolo sull'Effetto Intaglio, in relazione alla modellazione delle tensioni nei filetti di una vite.

Ad ulteriore prova della presenza di alti gradienti tensionali in un corpo triangolare caricato ai vertici da forze concentrate, la Figura 2.4.3 mostra uno studio fotoelastico di un triangolo tensionato imponendo schiacciamenti ai tre vertici. Emerge un accumularsi delle frange fotoelastiche nell'intorno dei vertici a "penna di pavone", coerente con gli alti gradienti tensionali presenti in tali zone. Nella parte centrale del triangolo, invece, le isocromatiche risultano molto più diradate, a segnalare uno stato tensionale abbastanza uniforme.

Da una parte quindi un corpo triangolare soggetto a forze nodali concentrate applicate ai vertici presenta uno **stato tensionale ad alti gradienti tensionali** in prossimità dei vertici, ed uno stato tensionale più uniforme nella zona centrale. Dall'altra parte, la teoria dell'elemento finito triangolare prevede uno **stato tensionale costante** al suo interno calcolato a partire dagli spostamenti nodali. Non esiste quindi alcuna combinazione delle intensità delle sei forze nodali in grado di produrre uno stato

Error! Bookmark not defined.

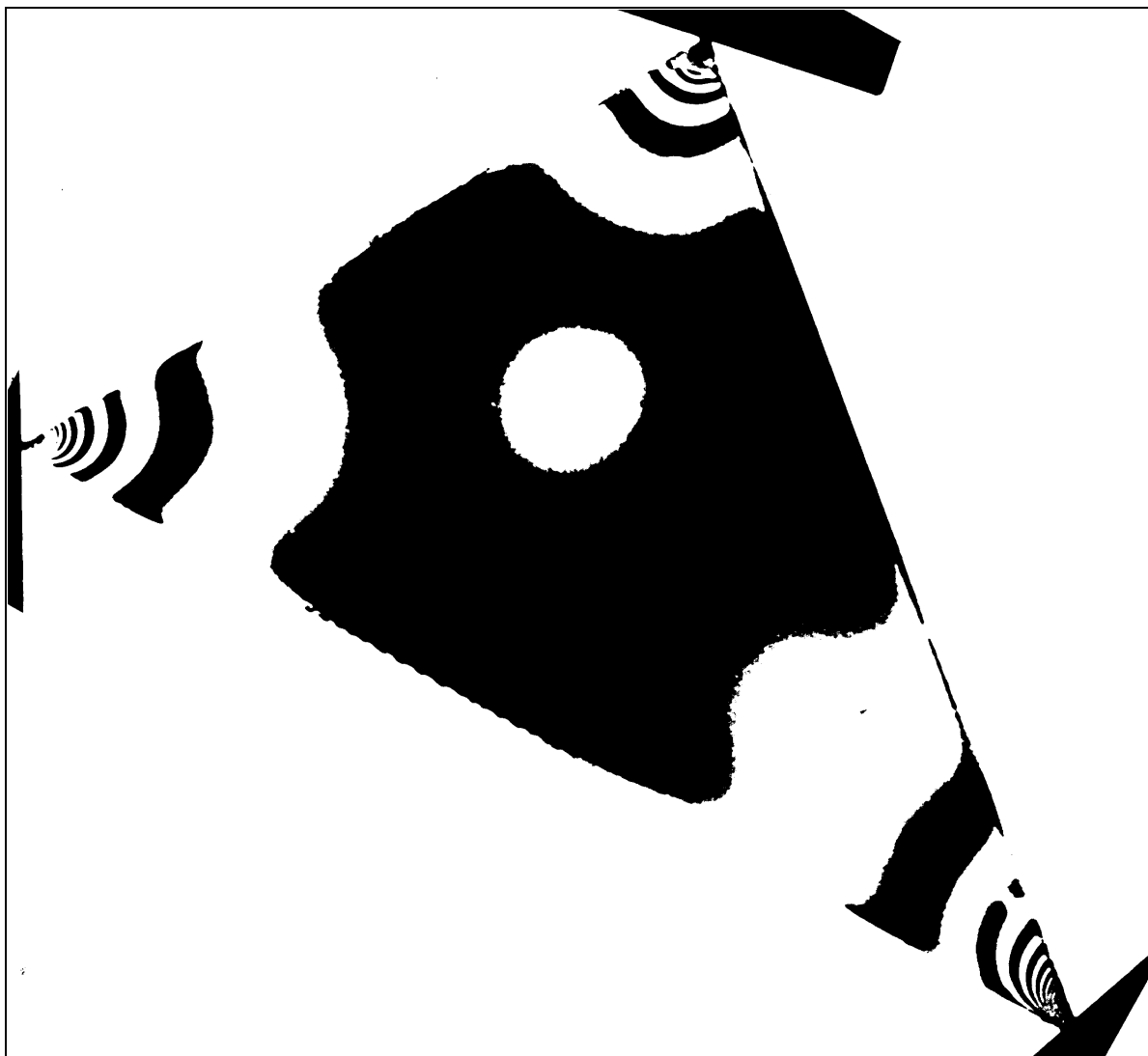


Figura 2.4.3

tensionale costante all'interno del triangolo. Si conclude che è impossibile calcolare forze nodali concentrate perfettamente coerenti con lo stato tensionale interno all'elemento finito triangolare.

Il problema di incoerenza sopra segnalato può venire superato soltanto se si accetta che le forze nodali producano uno stato tensionale **coerente in media**, e non punto per punto (cioè localmente), con quello della teoria degli elementi finiti. In altre parole, si cerca di individuare quali intensità delle forze nodali concentrate producono uno stato tensionale il cui valor medio, calcolato in modo opportuno, è uguale al valore costante delle tensioni valutate a partire dagli spostamenti nodali seguendo la teoria dell'elemento finito triangolare. Questa conduzione dei calcoli in modo da far tornare i conti in media viene affidata al principio dei **Lavori Virtuali**. Occorre calcolare l'energia interna al triangolo dalle tensioni interne espresse tramite gli spostamenti nodali, e l'energia delle

forze nodali partendo ancora dagli spostamenti nodali, ed eguagliare tali due lavori, calcolando così le forze concentrate nodali che sono energeticamente equivalenti alle tensioni costanti interne al triangolo, espresse in funzione degli spostamenti nodali. Per questa ragione si parla di **forze nodali equivalenti**.

Si ricorda che il termine "equivalente" è stato già incontrato in questo testo nel Capitolo sulle Tensioni Ideali, chiamate appunto anche "tensioni equivalenti". Il termine "equivalente" possiede in entrambi i casi il significato di "uguale sotto un determinato aspetto". Nel caso delle forze nodali, esse producono una uguale energia interna. Nel caso delle tensioni ideali, esse producono una uguale energia di distorsione.

Prima di affrontare il calcolo dell'energia interna e del lavoro delle forze nodali in un elemento finito triangolare, si considera a scopo didattico una geometria monodimensionale, quale un'asta caricata a solo sforzo normale di trazione. Se la tensione monodimensionale al suo interno è σ , la deformazione assiale è ϵ , la lunghezza della trave è l , il suo allungamento è Δl , la sezione trasversale è A , ed il carico applicato di trazione è P , allora l'energia interna L_i espressa in funzione dell'allungamento (spostamento) Δl vale:

$$L_i = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon dV = \int_V \frac{1}{2} (E \epsilon) \epsilon dV = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \int_V dV = \frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 \int_V dV =$$

$$\frac{1}{2} E \left(\frac{\Delta l}{l} \right)^2 A l = \frac{E A \Delta l^2}{2 l} \quad (2.4.1)$$

dove la tensione σ è stata espressa in funzione della deformazione ϵ , a sua volta espressa in funzione dello spostamento Δl .

Il lavoro della forza esterna L_e espresso in funzione della forza applicata P e dello spostamento Δl vale:

$$L_e = \frac{1}{2} P \Delta l \quad (2.4.2)$$

Eguagliando il lavoro interno ed esterno, si calcola il carico applicato P dall'allungamento (spostamento) Δl :

$$L_i = \frac{E A \Delta l^2}{2 l} = L_e = \frac{1}{2} P \Delta l \Rightarrow P = \frac{E A \Delta l}{l} \quad (2.4.3)$$

Si ripercorrono ora questi calcoli energetici monodimensionali riferiti ad un'asta, adattandoli ad una geometria bidimensionale triangolare. Il lavoro interno in un elemento triangolare piano di area A , espresso in funzione degli spostamenti nodali vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_A \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dA = \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dA = \frac{1}{2} \int_A (\mathbf{B} \boldsymbol{\delta})^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_A \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} dA = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \left(\int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA \right) \boldsymbol{\delta} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Nei passaggi (2.4.4) si è fatto uso della relazione che lega la trasposta del prodotto di due matrici al prodotto delle trasposte delle due matrici:

$$(\mathbf{A} \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (2.4.5)$$

Inoltre, nei passaggi (2.4.4) si è estratto dall'integrale esteso all'area A sia il vettore trasposto degli spostamenti nodali, $\boldsymbol{\delta}^T$, che $\boldsymbol{\delta}$. Infatti, tali spostamenti nodali agiscono ai vertici (nodi) dell'elemento finito triangolare, e cioè si riferiscono a punti singoli di A , e non sono funzioni distribuite su tutta l'area triangolare. Di conseguenza, gli spostamenti nodali non interagiscono col meccanismo di integrazione in dA , e quindi possono essere estratti dall'integrale.

Si noti infine che l'espressione incontrata nelle (2.4.4):

$$\int_A \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta} dA \quad (2.4.6)$$

è uno scalare. Si ricorda infatti che \mathbf{D} è una matrice 3×3 , \mathbf{B} è 3×6 , è un vettore colonna 6×1 , \mathbf{B}^T è 6×3 , ed infine $\boldsymbol{\delta}^T$ è un vettore riga 1×6 . Quindi la funzione integranda $\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\delta}$ è $1 \times (6 \times 3) \times (3 \times 3) \times (3 \times 6) \times 1 = 1$, e quindi l'integrando è uno scalare, come di solito avviene. Questo risultato è coerente col fatto che l'integrando nella (2.4.6) è strettamente collegato

all'energia interna, che è uno scalare e non, per esempio, un vettore od un tensore.

Invece, l'espressione sempre incontrata nelle (2.4.4) :

$$\int_A B^T D B dA \quad (2.4.7)$$

non è uno scalare, ma è una matrice $(63)(33)(36) = 66$. L'espressione (2.4.7) rappresenta quindi l'integrale di una matrice 66 , e va intesa come una matrice i cui termini sono gli integrali dei $66 = 36$ termini della matrice $B^T D B$.

Si calcola ora il lavoro esterno L_e delle forze nodali equivalenti. Si ottiene:

$$L_e = \frac{1}{2} (F_1 \delta_1 + F_2 \delta_2 + F_3 \delta_3 + F_4 \delta_4 + F_5 \delta_5 + F_6 \delta_6) = \frac{1}{2} \delta^T F \quad (2.4.8)$$

Le forze nodali equivalenti si calcolano eguagliando l'energia interna all'energia esterna:

$$L_e = \frac{1}{2} \delta^T F = L_i = \frac{1}{2} \delta^T \left(\int_A B^T D B dA \right) \delta \Rightarrow F = \left(\int_A B^T D B dA \right) \delta = k \delta \quad (2.4.9)$$

dove k è una matrice 66 , e viene chiamata **matrice di rigidezza dell'elemento finito**. I vettori di forza, F , di spostamento, δ , e la matrice di rigidezza, k , scritti per esteso sono:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4.9)$$

Si sono così espresse le forze nodali in funzione degli spostamenti nodali tramite la matrice di rigidezza, la quale costituisce una versione pluridimensionale del coefficiente che lega in una molla la forza allo schiacciamento.

Si conclude osservando che l'eguaglianza (2.4.4) che permette di definire le forze nodali equivalenti si fonda su una integrazione sull'area triangolare, operazione che effettua una **media**, dando quindi alle forze nodali il significato di grandezze energeticamente corrette, ma localmente scorrette. Inoltre, si nota che usualmente il principio dei Lavori Virtuali viene impiegato per risolvere in modo esatto una struttura. In questo caso, invece, il principio dei Lavori Virtuali viene usato per determinare una soluzione approssimata, e cioè per mediare un errore.

È stato notato che queste soluzioni numeriche in media assomigliano ad alcune misure sperimentali le quali, agendo su di una zona di dimensione non piccolissima, mediano la lettura in tale zona. Per esempio, gli estensimetri elettrici effettuano una lettura delle deformazioni. Essendo gli estensimetri di dimensioni di qualche millimetro, essi forniscono una lettura della media delle deformazioni nella zona in cui sono incollati. In un testo di elementi finiti si legge: *In modeling physical phenomena, it is often desirable to measure . . . the data and/or the solution of a boundary-value problem. Since any real measurement device (strain gauge, thermocouple, etc.) will have finite size, these quantities can, at best, be determined only in some average sense over small regions and not at any particular single point. The . . . [finite element solution] of the problem can be interpreted as assuring us that the solution will appear to be correct when tested at any location in the region with an arbitrary small transducer.*

2.4.1 La simmetria della matrice di rigidezza dell'elemento finito triangolare

Si ricorda il **teorema di reciprocità o di Betti**. Siano A e B due sistemi di forze agenti su di un corpo elastico. Il lavoro indiretto che un sistema di forze A già applicato ad un corpo elastico compie durante l'applicazione di un sistema di forze B è uguale al lavoro indiretto che compirebbe il sistema di forze B se fosse già applicato allo stesso corpo elastico durante l'applicazione del sistema A . Non si discutono le condizioni che i vincoli devono soddisfare per l'applicabilità del teorema di Betti.

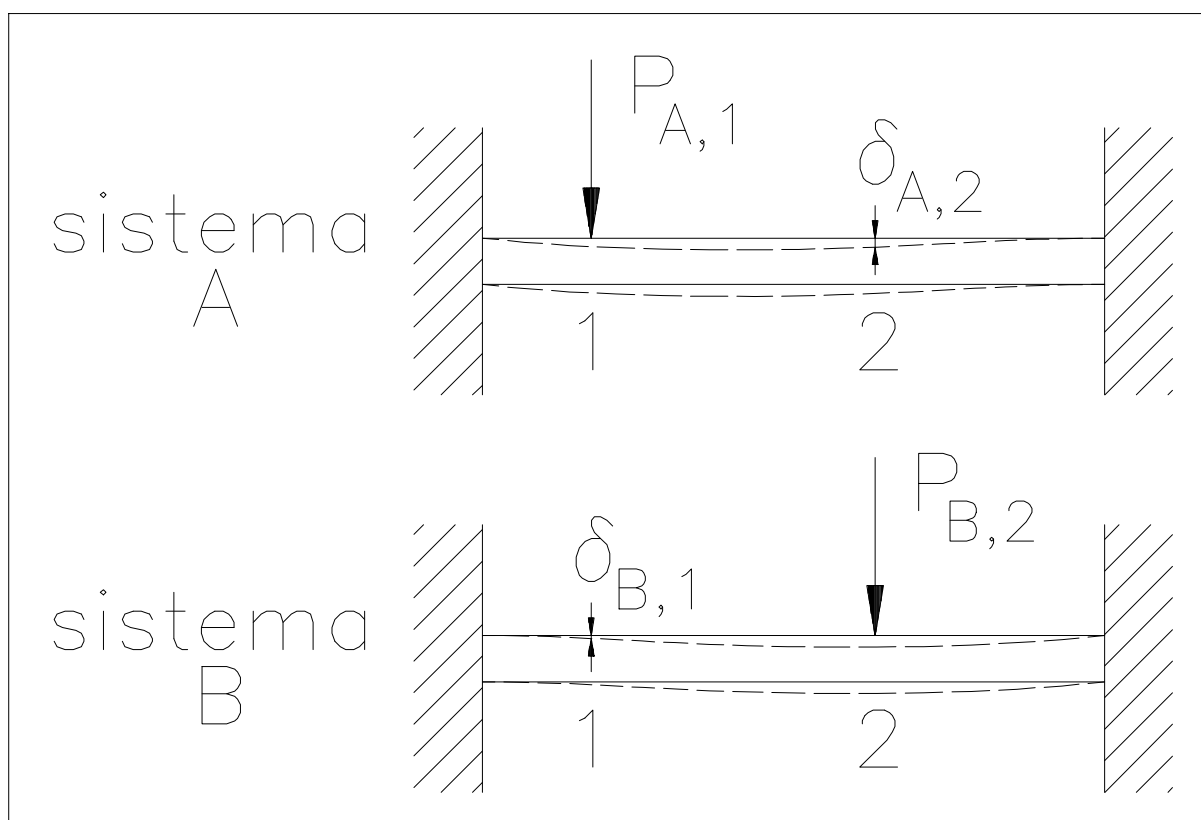


Figura 2.4.1.1

Si consideri l'esempio di Figura 2.4.1.1, di una trave dapprima caricata da una forza $P_{A,1}$ applicata alla sezione 1, che produce la freccia $\delta_{A,2}$ in corrispondenza della sezione 2, e successivamente inflessa da una forza $P_{B,2}$ applicata alla sezione 2, che produce la freccia $\delta_{B,1}$ in corrispondenza della sezione 1. Il teorema di reciprocità asserisce che vale la seguente relazione:

$$P_{A,1} \delta_{B,1} = P_{A,2} \delta_{B,2} \quad (2.4.1.1)$$

Si applica nel seguito il teorema di reciprocità per dimostrare che la matrice di rigidezza di un elemento finito triangolare è simmetrica. Ci si riferisce al legame tra vettore forza \mathbf{F} e vettore spostamento tramite la matrice di rigidezza \mathbf{k} :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.4.1.2)$$

Il sistema A è supposto costituito da un vettore di spostamenti tutto nullo tranne il termine δ_2 , e dalle forze nodali \mathbf{F} corrispondenti, calcolate tramite la (2.4.1.2). In particolare, F_5 vale:

$$F_5 = k_{5,2} \delta_2 \quad (2.4.1.3)$$

Il sistema B è costituito da un vettore di spostamenti tutto nullo tranne il termine δ_5 , e dalle forze nodali \mathbf{F} corrispondenti. In particolare, F_2 vale:

$$F_2 = k_{2,5} \delta_5 \quad (2.4.1.4)$$

Discende dal teorema di reciprocità la seguente eguaglianza:

$$F_5 \delta_5 = F_2 \delta_2 \Rightarrow (k_{5,2} \delta_2) \delta_5 = (k_{2,5} \delta_5) \delta_2 \Rightarrow k_{5,2} = k_{2,5} \quad (2.4.1.4)$$

da cui consegue che **la matrice di rigidezza dell'elemento finito è simmetrica.**

Si dimostra inoltre che la matrice di rigidezza dell'elemento è semidefinita positiva.

2.5 L'assemblaggio e le equazioni di equilibrio di forza nodale

Si consideri la semplice struttura di Figura 2.5.1, formata dai tre elementi finiti triangolari 1, 2, e 3 (il numero degli elementi viene cerchiato, per evitare di confondere tale numero con quello dei nodi), e dai cinque nodi 1, 2, 3, 4, e 5. I vertici di ogni elemento triangolare sono indicati da tre indici assunti in senso antiorario, dove il primo vertice è indicato dall'indice i , il secondo da j , ed il terzo da k .

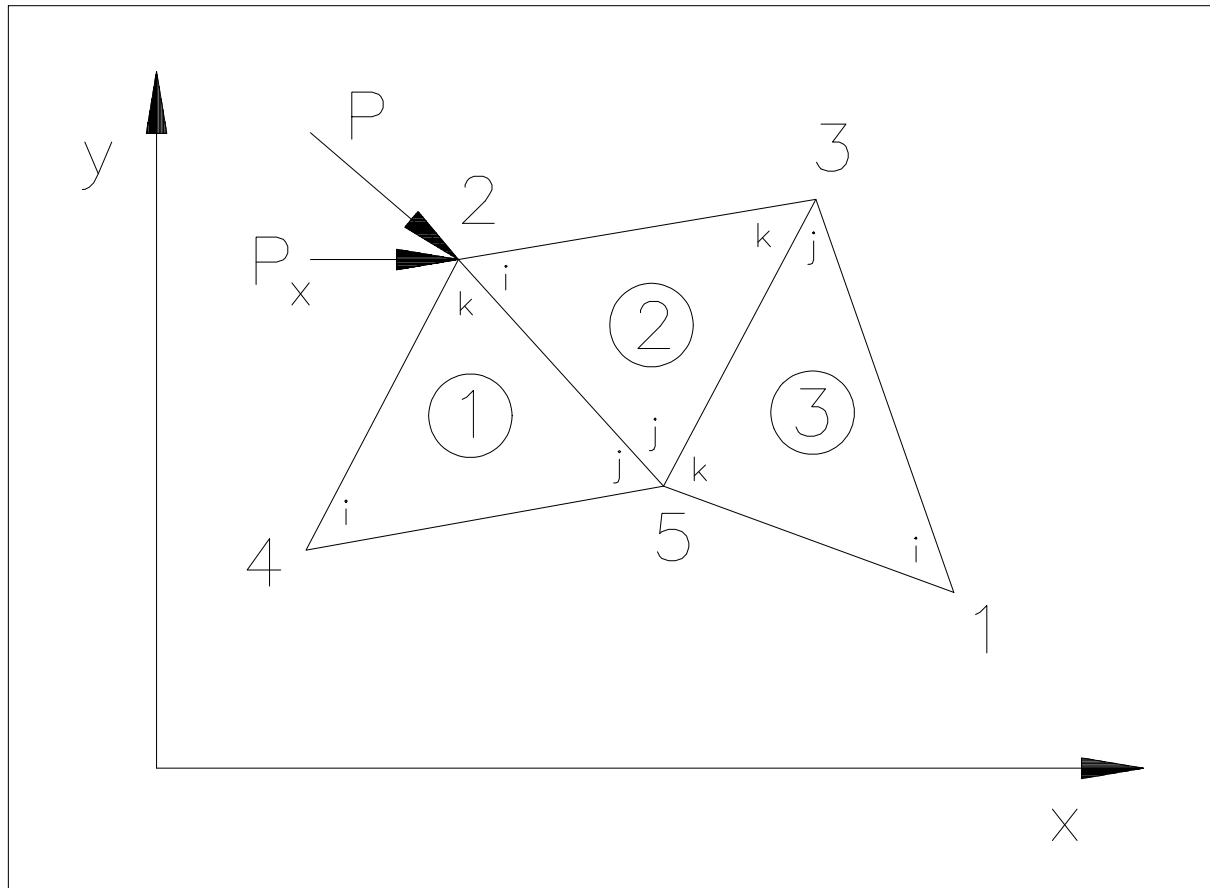


Figura 2.5.1

Si vuole per esempio scrivere l'equazione di equilibrio in direzione x del nodo 2. Si intende cioè determinare la condizione per cui il nodo 2, sotto l'azione della forza nodale in direzione x esercitata dall'elemento 1, relativa quindi al vertice k dell'elemento 1, e della forza nodale in direzione x esercitata dall'elemento 2, relativa quindi al vertice i dell'elemento 2, equilibra la componente lungo x della forza esterna P .

Si considera dapprima l'elemento finito triangolare 1. Il legame tra forze nodali e spostamenti nodali è:

$$\begin{Bmatrix} F_{(1)1} \\ F_{(1)2} \\ F_{(1)3} \\ F_{(1)4} \\ F_{(1)5} \\ F_{(1)6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1)1,1} & k_{(1)1,2} & k_{(1)1,3} & k_{(1)1,4} & k_{(1)1,5} & k_{(1)1,6} \\ k_{(1)2,1} & k_{(1)2,2} & k_{(1)2,3} & k_{(1)2,4} & k_{(1)2,5} & k_{(1)2,6} \\ k_{(1)3,1} & k_{(1)3,2} & k_{(1)3,3} & k_{(1)3,4} & k_{(1)3,5} & k_{(1)3,6} \\ k_{(1)4,1} & k_{(1)4,2} & k_{(1)4,3} & k_{(1)4,4} & k_{(1)4,5} & k_{(1)4,6} \\ k_{(1)5,1} & k_{(1)5,2} & k_{(1)5,3} & k_{(1)5,4} & k_{(1)5,5} & k_{(1)5,6} \\ k_{(1)6,1} & k_{(1)6,2} & k_{(1)6,3} & k_{(1)6,4} & k_{(1)6,5} & k_{(1)6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{(1)1} \\ \delta_{(1)2} \\ \delta_{(1)3} \\ \delta_{(1)4} \\ \delta_{(1)5} \\ \delta_{(1)6} \end{Bmatrix} \quad (2.5.1)$$

dove per esempio il simbolo $F_{(1)3}$ indica la forza nodale relativa all'elemento ed al grado di libertà 3 . Siccome ogni vertice di ogni elemento finito possiede due gradi di libertà, lungo x ed y , il primo grado di libertà è relativo al primo vertice dell'elemento , in direzione x , e cioè al vertice indicato con l'indice i in Figura 2.5.1 . Il secondo grado di libertà è relativo al primo vertice dell'elemento , indicato con l'indice i , ma in direzione y . Il terzo grado di libertà è relativo al secondo vertice dell'elemento , indicato con l'indice j , in direzione x . Quindi il simbolo $F_{(1)3}$ indica la forza nodale relativa all'elemento , in direzione x , del secondo vertice, quello indicato coll'indice j .

Chiarito questo, la forza $F_{(1)3}$ può venire anche indicata come F_9 , dato che essa è relativa al nodo 5 , quello a contatto col vertice j , ed al grado di libertà lungo x . Infatti il nodo 1 possiede due gradi di libertà, per cui F_1 indica la componente di forza lungo x al primo nodo della struttura , quello cioè indicato con 1 in Figura 2.5.1 , F_2 la componente di forza lungo y al primo nodo, F_3 la componente di forza lungo x al secondo nodo, e così via.

In generale, se n è un generico nodo, il grado di libertà lungo x è associato all'indice $2n-1$, mentre quello lungo y va associato all'indice $2n$.

Questa diversa codifica si basa sui nodi e non sugli elementi, e quindi è più aderente al complesso dell'intera struttura, non più intesa come sezionata nei suoi elementi finiti.

Occorre ora interpretare il significato dei sei spostamenti nodali della (2.5.1) . Seguendo una interpretazione del tutto analoga a quella delle forze, il simbolo per esempio $\delta_{(1)4}$ indica lo spostamento relativo all'elemento ed al quarto grado di libertà, e cioè al secondo vertice, di indice j , in direzione y . Si noti che il secondo vertice tocca il nodo 5 . Secondo la codifica collegata ai nodi della struttura, $\delta_{(1)4}$ viene indicato

come 10 , dato che si riferisce al secondo grado di libertà, lungo y , del nodo 5 .

Alla luce della codifica basata sui nodi, il legame (2.5.1) tra forze e spostamenti nodali nell'elemento può quindi venire riscritto come:

$$\begin{Bmatrix} F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1)1,1} & k_{(1)1,2} & k_{(1)1,3} & k_{(1)1,4} & k_{(1)1,5} & k_{(1)1,6} \\ k_{(1)2,1} & k_{(1)2,2} & k_{(1)2,3} & k_{(1)2,4} & k_{(1)2,5} & k_{(1)2,6} \\ k_{(1)3,1} & k_{(1)3,2} & k_{(1)3,3} & k_{(1)3,4} & k_{(1)3,5} & k_{(1)3,6} \\ k_{(1)4,1} & k_{(1)4,2} & k_{(1)4,3} & k_{(1)4,4} & k_{(1)4,5} & k_{(1)4,6} \\ k_{(1)5,1} & k_{(1)5,2} & k_{(1)5,3} & k_{(1)5,4} & k_{(1)5,5} & k_{(1)5,6} \\ k_{(1)6,1} & k_{(1)6,2} & k_{(1)6,3} & k_{(1)6,4} & k_{(1)6,5} & k_{(1)6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{Bmatrix} \quad (2.5.2)$$

Si considera ora l'elemento finito triangolare . Il legame tra le forze nodali e gli spostamenti nodali è, similmente alle (2.5.1) valide per l'elemento finito :

$$\begin{Bmatrix} F_{(2)1} \\ F_{(2)2} \\ F_{(2)3} \\ F_{(2)4} \\ F_{(2)5} \\ F_{(2)6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2)1,1} & k_{(2)1,2} & k_{(2)1,3} & k_{(2)1,4} & k_{(2)1,5} & k_{(2)1,6} \\ k_{(2)2,1} & k_{(2)2,2} & k_{(2)2,3} & k_{(2)2,4} & k_{(2)2,5} & k_{(2)2,6} \\ k_{(2)3,1} & k_{(2)3,2} & k_{(2)3,3} & k_{(2)3,4} & k_{(2)3,5} & k_{(2)3,6} \\ k_{(2)4,1} & k_{(2)4,2} & k_{(2)4,3} & k_{(2)4,4} & k_{(2)4,5} & k_{(2)4,6} \\ k_{(2)5,1} & k_{(2)5,2} & k_{(2)5,3} & k_{(2)5,4} & k_{(2)5,5} & k_{(2)5,6} \\ k_{(2)6,1} & k_{(2)6,2} & k_{(2)6,3} & k_{(2)6,4} & k_{(2)6,5} & k_{(2)6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{(2)1} \\ \delta_{(2)2} \\ \delta_{(2)3} \\ \delta_{(2)4} \\ \delta_{(2)5} \\ \delta_{(2)6} \end{Bmatrix} \quad (2.5.3)$$

Se si impiega la codifica basata sui nodi, si osserva che il primo vertice dell'elemento , quello cioè con l'indice i , arriva al nodo 2 . Il primo grado di libertà del nodo 2 , quello lungo x , è rappresentato dall'indice $22-1 = 3$, mentre il secondo grado di libertà, lungo y , è rappresentato dall'indice $22 = 4$. Il secondo vertice dell'elemento , quello cioè con l'indice j , arriva al nodo 5 . Il primo grado di libertà del nodo 5 è rappresentato dall'indice $52-1 = 9$, mentre il secondo grado di libertà è rappresentato dall'indice $52 = 10$. Infine, il terzo vertice dell'elemento , quello con l'indice k , arriva al nodo 3 , i cui due indici sono $32-1 = 5$ e $32 = 6$. Con la codifica basata sui nodi, il legame tra forze e spostamenti nodali nell'elemento può venire riscritto come:

Error! Bookmark not defined.

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ F_4 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(2)1,1} & k_{(2)1,2} & k_{(2)1,3} & k_{(2)1,4} & k_{(2)1,5} & k_{(2)1,6} \\ k_{(2)2,1} & k_{(2)2,2} & k_{(2)2,3} & k_{(2)2,4} & k_{(2)2,5} & k_{(2)2,6} \\ k_{(2)3,1} & k_{(2)3,2} & k_{(2)3,3} & k_{(2)3,4} & k_{(2)3,5} & k_{(2)3,6} \\ k_{(2)4,1} & k_{(2)4,2} & k_{(2)4,3} & k_{(2)4,4} & k_{(2)4,5} & k_{(2)4,6} \\ k_{(2)5,1} & k_{(2)5,2} & k_{(2)5,3} & k_{(2)5,4} & k_{(2)5,5} & k_{(2)5,6} \\ k_{(2)6,1} & k_{(2)6,2} & k_{(2)6,3} & k_{(2)6,4} & k_{(2)6,5} & k_{(2)6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.5.4)$$

Si ritorna all'equazione di equilibrio di forza nodale lungo x al nodo 2 . La forza F_3 esercitata sul nodo 2 dall'elemento in direzione x vale, dalle (2.5.2) :

$$F_3 = k_{(1)5,1} \delta_1 + k_{(1)5,2} \delta_2 + k_{(1)5,3} \delta_9 + k_{(1)5,4} \delta_{10} + k_{(1)5,5} \delta_3 + k_{(1)5,6} \delta_4 \quad (2.5.5)$$

Similmente, la forza F_3 esercitata sul nodo 2 dall'elemento in direzione x vale, dalle (2.5.4) :

$$F_3 = k_{(2)1,1} \delta_3 + k_{(2)1,2} \delta_4 + k_{(2)1,3} \delta_9 + k_{(2)1,4} \delta_{10} + k_{(2)1,5} \delta_5 + k_{(2)1,6} \delta_6 \quad (2.5.6)$$

La forza totale lungo x , F_3 , esercitata simultaneamente dagli elementi e sul nodo 2 vale quindi:

$$F_3 = k_{(1)5,1} \delta_1 + k_{(1)5,2} \delta_2 + (k_{(1)5,5} + k_{(2)1,1}) \delta_3 + (k_{(1)5,6} + k_{(2)1,2}) \delta_4 + k_{(2)1,5} \delta_5 + k_{(2)1,6} \delta_6 + (k_{(1)5,3} + k_{(2)1,3}) \delta_9 + (k_{(1)5,4} + k_{(2)1,4}) \delta_{10} \quad (2.5.7)$$

Per esprimere l'equazione di equilibrio lungo x del nodo 2 , la forza F_3 va eguagliata alla componente lungo x del carico esterno, P_x . La scrittura matriciale della equazione di equilibrio per il nodo 2 lungo x è :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{(1)5,1} & k_{(1)5,2} & (k_{(1)5,5} + k_{(2)1,1}) & (k_{(1)5,6} + k_{(2)1,2}) & k_{(2)1,5} & k_{(2)1,6} & 0 & 0 & (k_{(1)5,3} + k_{(2)1,3}) & (k_{(1)5,4} + k_{(2)1,4}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \end{Bmatrix}$$

(2.5.8)

dove la matrice della (2.5.8) rappresenta la matrice di rigidezza della struttura.

Dalle considerazioni fin qui sviluppate emerge con chiarezza la regola generale da seguire per allocare i coefficienti delle matrici di rigidezza dei vari elementi finiti nella matrice di rigidezza della struttura, in modo che le varie righe rappresentino le equazioni di equilibrio nodale della struttura. Le matrici di rigidezza degli elementi finiti, per esempio la (2.5.1), possiedono indici che variano da 1 a 6, e che sono collegati ai tre indici i , j , e k , dei vertici del triangolo, dove ad ogni vertice sono associati due gradi di libertà. Questi indici seguono quindi una numerazione locale, agganciata cioè all'ordine di attribuzione, elemento per elemento, dei tre indici i , j , e k . Quando i 66 = 36 coefficienti della matrice di rigidezza di ogni elemento vengono allocati nella matrice di rigidezza globale della struttura, occorre associare agli **indici locali** 1 - 6 gli **indici globali** correlati ai nodi a cui arrivano ordinatamente i tre vertici dell'elemento finito triangolare.

Per esempio, nella meshatura di Figura 2.5.1, relativamente all'elemento finito, il vertice i arriva al nodo 4, il vertice j al nodo 5, ed il vertice k al nodo 2. Il vertice i è collegato agli indici 1 e 2 della matrice di rigidezza locale, ma questi indici devono diventare 42-1 = 7 e 42 = 8 per quel che riguarda gli indici della matrice di rigidezza globale della struttura. Similmente il vertice j dell'elemento finito è collegato agli indici 3 e 4 della matrice di rigidezza locale, ma questi indici devono diventare 52-1 = 9 e 52 = 10 per quel che riguarda gli indici della matrice di rigidezza globale della struttura. Infine, il vertice k è collegato agli indici 5 e 6 della matrice di rigidezza locale, ma questi indici devono

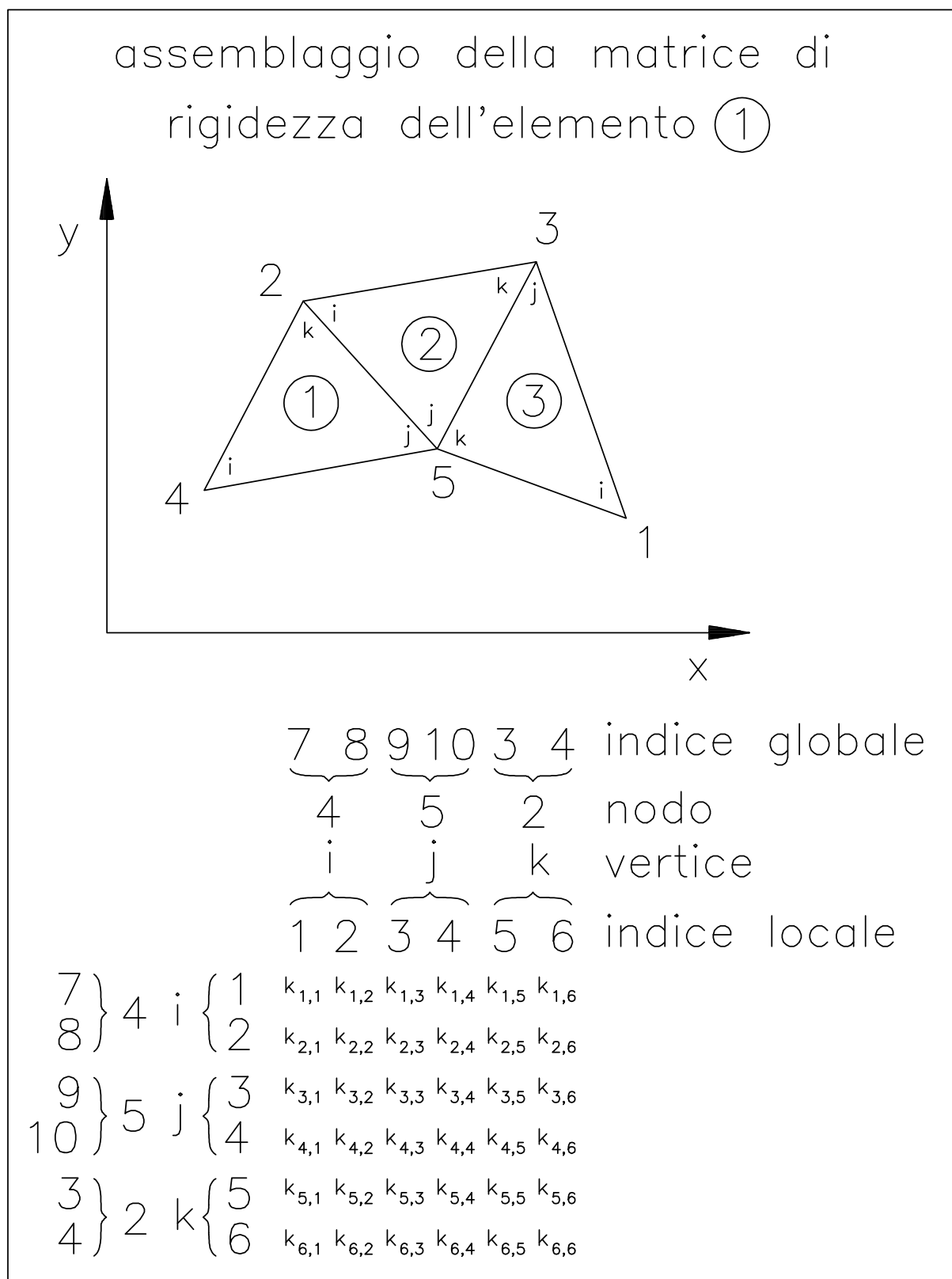


Figura 2.5.2

diventare $22-1 = 3$ e $22 = 4$ per quel che riguarda gli indici della matrice di rigidezza globale. Allora per esempio l'elemento $k_{(1)3,6}$ va assemblato nella matrice di rigidezza globale nel posto $K_{9,4}$.

Error! Bookmark not defined.

Si considera nel seguito l'elemento finito , dove il vertice i arriva al nodo 2 , il vertice j al nodo 5 , ed il vertice k al nodo 3 . Quindi gli indici 1 e 2 della matrice di rigidezza locale diventano $22-1 = 3$ e $22 = 4$ nella matrice di rigidezza globale della struttura, gli indici 3 e 4 locali diventano $52-1 = 9$ e $52 = 10$ nella matrice di rigidezza globale, ed infine gli indici 5 e 6 locali diventano $32-1 = 5$ e $32 = 6$ nella matrice di rigidezza globale.

Allora per esempio l'elemento $k_{(2)4,1}$ va assemblato nella matrice di rigidezza globale nel posto $K_{10,3}$, mentre l'elemento $k_{(2)1,5}$ va assemblato nella matrice di rigidezza globale nel posto $K_{3,5}$. Queste condizioni di assemblaggio sono rispettate nelle (2.5.8) , dove $k_{(1)5,1}$ è allocato nel posto $K_{3,7}$, cioè nella terza riga, settima colonna, mentre $k_{(2)1,5}$ è allocato nel posto $K_{3,5}$, cioè nella terza riga, quinta colonna.

Si propone infine la rappresentazione di Figura 2.5.2 , dove la matrice di rigidezza dell'elemento viene definita dapprima con i tre indici locali j , j , e k , poi con i tre indici che portano i nomi dei nodi a cui arrivano i tre vertici, ed infine con i sei indici globali, ancorati cioè alla numerazione nodale della struttura.

Nel Paragrafo 2.4.1 si è mostrato che la matrice di rigidezza dell'elemento finito è simmetrica. Siccome termini simmetrici della matrice di rigidezza dell'elemento vengono assemblati in termini simmetrici della matrice di rigidezza della struttura, ne deriva che **la matrice di rigidezza della struttura è simmetrica**. Si dimostra inoltre che la matrice di rigidezza della struttura è semidefinita positiva prima dell'imposizione del vincolamento.

2.5.1 L'autoequilibrio delle forze nodali nell'elemento finito

Nel Paragrafo 2.5 si è visto come imporre le equazioni di equilibrio di forza nodale. Ci si chiede in questo Paragrafo se occorre anche imporre un equilibrio non solo a livello di nodo, ma anche di elemento. In altre parole, l'elemento finito triangolare, se soggetto a sei spostamenti nodali generici, sviluppa sei forze nodali di intensità tale che l'elemento finito risulta equilibrato?

Si considera in questo Paragrafo i soli equilibri alla traslazione dell'elemento finito triangolare, lasciando allo studente il compito di esaminare l'equilibrio alla rotazione. Si riscrive nella (2.5.1.1) il legame tra vettore forza \mathbf{F} e vettore spostamento tramite la matrice di rigidezza \mathbf{k} dell'elemento triangolare:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & k_{5,6} \\ k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{6,4} & k_{6,5} & k_{6,6} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{Bmatrix} \quad (2.5.1.1)$$

e si impone all'elemento un moto di traslazione rigida orizzontale. A questo scopo, $u_i = u_j = u_k = C$, mentre $v_i = v_j = v_k = 0$. Esprimendo questi valori in termini di δ , si impone $\delta_1 = \delta_3 = \delta_5 = C$ e $\delta_2 = \delta_4 = \delta_6 = 0$. Imponendo all'elemento triangolare questo moto di traslazione rigida orizzontale, per ragioni fisiche non può nascere nel triangolo alcuno stato deformativo, né tensionale, e quindi non nascono forze nodali. Si ottengono quindi le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} F_1 &= k_{1,1} C + k_{1,3} C + k_{1,5} C = 0 \Rightarrow k_{1,1} + k_{1,3} + k_{1,5} = 0 \\ F_3 &= k_{3,1} C + k_{3,3} C + k_{3,5} C = 0 \Rightarrow k_{3,1} + k_{3,3} + k_{3,5} = 0 \\ F_5 &= k_{5,1} C + k_{5,3} C + k_{5,5} C = 0 \Rightarrow k_{5,1} + k_{5,3} + k_{5,5} = 0 \end{aligned} \quad (2.5.1.2)$$

Se l'elemento finito triangolare è autoequilibrato orizzontalmente, la somma delle forze nodali orizzontali deve essere identicamente nulla:

$$\begin{aligned}
F_1 + F_3 + F_5 &\equiv 0 \Rightarrow \\
(k_{1,1} + k_{3,1} + k_{5,1}) \delta_1 + (k_{1,3} + k_{3,3} + k_{5,3}) \delta_3 + (k_{1,5} + k_{3,5} + k_{5,5}) \delta_5 &\equiv 0
\end{aligned}
\tag{2.5.1.3}$$

Siccome la matrice di rigidezza \mathbf{k} è simmetrica, come dimostrato nel Paragrafo 2.4.1 , la (2.5.1.3) può essere riscritta invertendo gli indici dei termini $k_{i,j}$. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
F_1 + F_3 + F_5 &\equiv 0 \Rightarrow \\
(k_{1,1} + k_{3,1} + k_{5,1}) \delta_1 + (k_{1,3} + k_{3,3} + k_{5,3}) \delta_3 + (k_{1,5} + k_{3,5} + k_{5,5}) \delta_5 &\equiv 0 \Rightarrow \\
(k_{1,1} + k_{1,3} + k_{1,5}) \delta_1 + (k_{3,1} + k_{3,3} + k_{3,5}) \delta_3 + (k_{5,1} + k_{5,3} + k_{5,5}) \delta_5 &\equiv 0
\end{aligned}
\tag{2.5.1.4}$$

Dalle (2.5.1.2) deriva però che tutte le espressioni tra parentesi dell'ultima presunta identità delle (2.5.1.4) sono identicamente nulle, per cui l'identità è effettivamente valida. Si è quindi dimostrato che l'elemento finito triangolare, quando vengono imposti sei spostamenti nodali generici ai suoi vertici, sviluppa sei forze nodali che sono autoequilibrate in direzione orizzontale. In modo del tutto simile si può dimostrare che **l'elemento finito è autoequilibrato** anche in direzione verticale.

2.5.2 Il massimo numero di termini non nulli per ogni riga della matrice di rigidezza della struttura

Una generica riga della matrice di rigidezza della struttura è usualmente formata da pochi elementi non nulli e da molti elementi nulli. Si parla quindi di **matrice sparsa**. Questa caratteristica della matrice di rigidezza della struttura viene sfruttata nei solutori del sistema di equazioni algebriche, i quali limitano le operazioni necessarie a risolvere il sistema di equazioni ai termini non nulli, riducendo il numero di calcoli da effettuare, diminuendo quindi il tempo di calcolo.

Si vuole nel seguito determinare il numero di coefficienti non nulli per ogni **riga** della matrice di rigidezza della struttura, chiarendo in particolare come tale numero dipende dalla conformazione della meshatura. Inoltre, dato che si è già mostrato che la matrice di rigidezza della struttura è simmetrica, si esamina nel seguito il numero di coefficienti non nulli per una generica **colonna** della matrice di rigidezza della struttura, dato che questo approccio possiede un evidente significato fisico. Ci si riferisce in particolare al mesh rappresentato in Figura 2.5.2.1 , costituito da 10 nodi e da 11 elementi. Tale struttura è immaginata scarica, e quindi tutte le forze nodali risultano nulle.

Si pensi di applicare a questa struttura un vettore di spostamenti costituito da 19 termini tutti nulli tranne, per esempio, la componente di spostamento 9 , che rappresenta uno spostamento lungo x del nodo 5 . Allora tutti i nodi della struttura non si muovono, tranne il nodo 5 , che viene spostato lungo x ma non lungo y . Se si moltiplica tale vettore di spostamenti per la matrice di rigidezza \mathbf{K} della struttura, si ottengono le

forze \mathbf{F} che nascono ai nodi, forze che vengono assorbite dai vincoli nodali, di fatto imposti dalla condizione che tutti i nodi non si spostano tranne uno. In altre parole, tali forze vanno intese come reazioni vincolari per i nodi non spostati, e come forza imposta per il nodo spostato, forza necessaria ad ottenere appunto lo spostamento imposto.

Si nota che, se si sposta solo il nodo 5 lungo x , nascono reazioni vincolari ai nodi $1, 2, 3, 4, 8$, ma non per esempio al nodo

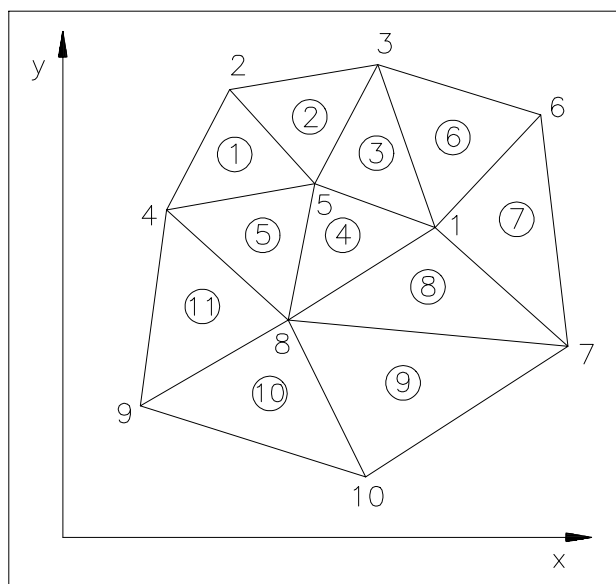


Figura 2.5.2.1

10 , dato che tale nodo è completamente circondato da nodi che non vengono spostati. Lo stesso risultato si avrebbe se si spostasse il nodo 5 lungo y .

Emerge da queste osservazioni la regola per decidere in quali nodi uno spostamento lungo x del nodo 5 produce reazioni vincolari: **le reazioni vincolari nascono nei nodi appartenenti ad elementi che toccano il nodo spostato, incluso il nodo spostato**. Nel caso di Figura 2.5.2.1 , i nodi nei quali nascono le reazioni vincolari in seguito ad uno spostamento lungo x del nodo 5 sono i nodi 1 , 2 , 3 , 4 , 8 , ed anche il nodo 5 relativamente alla direzione y .

Si vuole mostrare nel seguito che il numero di forze che nascono ai nodi in seguito allo spostamento di un nodo è strettamente collegato al numero di elementi non nulli in una riga della matrice di rigidezza della struttura. Infatti, riprendendo l'esempio precedente, le componenti lungo x ed y delle reazioni vincolari ai vari nodi si ottengono moltiplicando il vettore δ , tutto nullo tranne la componente 9 , per la matrice di rigidezza K , e quindi sono esprimibili tramite le relazioni:

$$F_i = K_{i,9} \delta_9 \quad i = 1, 20 \quad (2.5.2.1)$$

Se quindi alcune delle componenti i -esime delle reazioni vincolari, F_i , sono nulle, tali devono essere anche le componenti $K_{i,9}$ della matrice di rigidezza della struttura. Ricordando che ogni nodo possiede due gradi di libertà, si conclude che **il massimo numero di termini non nulli** per una generica riga (o colonna) i -esima della matrice di rigidezza **si ottiene:** a)

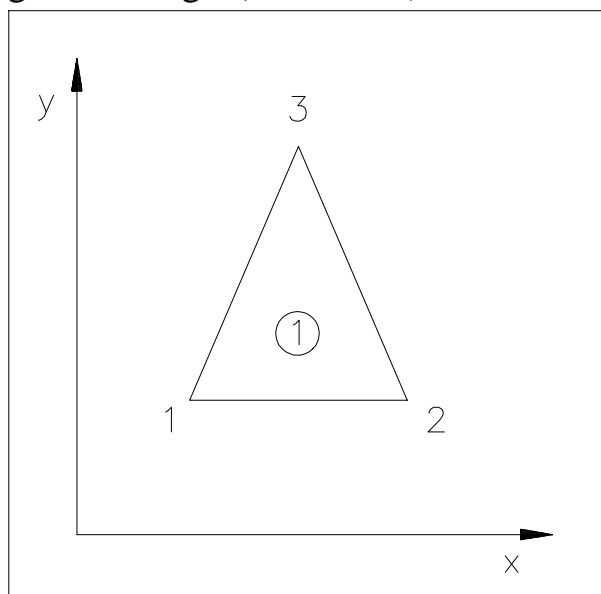


Figura 2.5.2.2

b) individuando a quale nodo del mesh corrisponde la riga i -esima della matrice di rigidezza della struttura; c) contando il numero dei nodi appartenenti agli elementi che toccano il nodo in questione, comprendendo anche questo nodo; d) si raddoppia tale numero, ottenendo il massimo numero di coefficienti non nulli nella riga i -esima.

Per esempio, nel caso di Figura 2.5.2.1 , la riga (o colonna) 9 corrisponde al nodo 5 (grado di libertà lungo x) , circondato dai

cinque nodi 1 , 2 , 3 , 4 , 8 . Comprendendo il nodo 5 , i nodi da considerare sono in numero di sei, e quindi il massimo numero di termini non nulli nella riga 9 è $26 = 12$. Lo stesso risultato si ha per la riga 10 , sempre relativa al nodo 5 ma al grado di libertà lungo y .

Si osserva infine che il numero di coefficienti non nulli calcolato secondo la regola precedente è un numero massimo, dato che i coefficienti effettivamente non nulli possono risultare in numero lievemente inferiore. Si consideri infatti l'elemento finito di Figura 2.5.2.2 . Se si applica uno spostamento lungo x al nodo 3 , mentre tutte le altre componenti di spostamento vengono imposte nulle, non nasce alcuna reazione vincolare al nodo 3 lungo y dato che, a causa della particolare forma isoscele dell'elemento triangolare, il nodo 3 non tende a spostarsi lungo y in seguito ad un suo spostamento lungo x , almeno nel campo delle piccole deformazioni. Allora il coefficiente $K_{5,6}$ $K_{6,5}$ della matrice di rigidezza della struttura, matrice che coincide con quella dell'unico elemento finito, deve essere nullo, per cui il numero di elementi effettivamente non nulli per riga è inferiore a quello ottenuto applicando la regola sopra derivata.

Do not worry about your difficulties in mathematics; I can assure you that mine are still greater.

Albert Einstein

2.6 I carichi esterni

Di solito i carichi imposti sono distribuiti, spesso uniformemente, lungo tratti del contorno del componente meccanico. Siccome la teoria

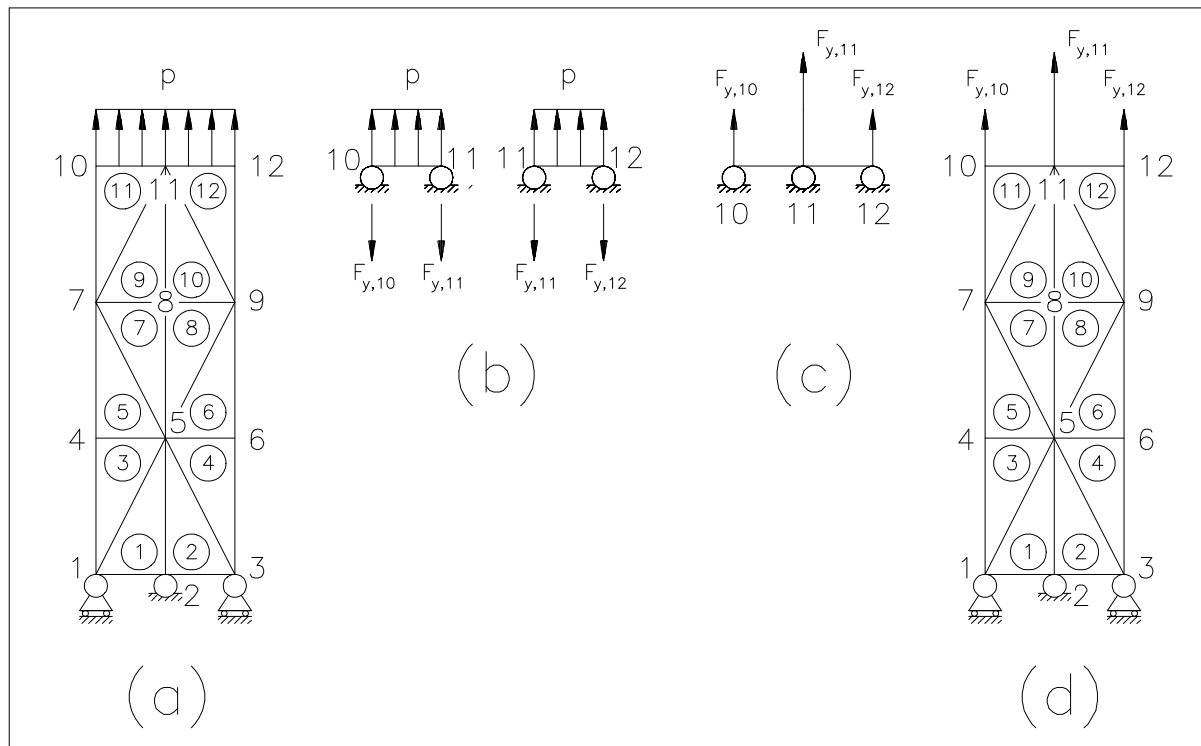


Figura 2.6.1

degli elementi finiti permette soltanto di applicare forze concentrate ai nodi, ma non pressioni distribuite lungo i lati degli elementi, i carichi distribuiti vanno sostituiti con forze concentrate ai nodi. La Figura 2.6.1 illustra questo processo di approssimazione. La pressione uniformemente distribuita lungo i lati compresi tra i nodi 10 e 11 , e tra i nodi 11 e 12 , Figura 2.6.1 (a) , agisce su tali lati come se essi si comportassero come due travi appoggiate alle estremità, in corrispondenza quindi dei nodi 10 e 11 la prima trave, e dei nodi 11 e 12 la seconda trave, Figura 2.6.1 (b) . Questo modello a trave produce quattro reazioni agli appoggi $F_{y,10}$, $F_{y,11}$, $F_{y,12}$, che in questo semplice caso sono tutte uguali, e che sono le forze concentrate, sostitutive del carico distribuito, da applicare ai nodi, Figura 2.6.1 (c) . Di conseguenza, il nodo 11 risulta caricato dalla sovrapposizione di due reazioni agli appoggi. In questo semplice caso, il nodo 11 risulta caricato il doppio dei nodi 10 e 12 , Figura 2.6.1 (d) .

Una volta determinati i carichi concentrati rappresentativi del caricamento della struttura, tali forze concentrate vanno allocate nel vettore dei termini noti. La regola di allocazione è quella già vista per le matrici di

rigidezza degli elementi. Per esempio, se al nodo 27 è applicata una forza lungo x , questa componente va allocata all'indice $272-1 = 53$ nel vettore di forza nodale, cioè nel vettore dei termini noti. Di solito i nodi caricati sono una percentuale molto bassa, spesso dell'ordine del 10%, del numero totale di nodi della struttura. Infatti, i carichi interni al corpo non sono in genere caricati dato che i carichi derivano in genere da problemi di contatto, e quindi sono applicati ai nodi di bordo. Soltanto nei caricamenti inerziali, per esempio in un disco rotante, i carichi sono distribuiti su tutto il corpo, e quindi vanno applicati anche ai nodi interni.

2.7 Vincolamento

La teoria degli elementi finiti agli spostamenti prevede che le tutte le forze nodali siano note, mentre tutti gli spostamenti nodali siano incogniti. D'altro canto, se non si impone alcun vincolamento alla struttura, questa risulta in genere labile, e quindi non è possibile calcolare gli spostamenti dei nodi conseguenti al caricamento della struttura se non a meno di indesiderati spostamenti rigidi.

Queste considerazioni dimostrano la necessità di vincolare la struttura, in modo da eliminare i moti di corpo rigido, ma anche individuano una difficoltà incontrata nell'imporre il vincolamento, dato che, negli elementi finiti agli spostamenti, gli spostamenti sono tutti incogniti, e quindi ad essi non si possono direttamente assegnare dei valori imposti senza alterare lo schema risolutivo.

Per imporre agli spostamenti nodali incogniti i valori desiderati, occorre alterare l'equazione relativa al grado di libertà vincolato, in modo tale che la soluzione in termini di spostamenti di tale equazione assuma il valore richiesto di spostamento, **senza quindi togliere allo spostamento il suo carattere di incognita**.

Si vuole per esempio imporre che lo spostamento lungo x del nodo 53 di una struttura formata da 97 nodi sia nullo. L'equazione di equilibrio nodale lungo x del nodo 53 è espressa dall'indice globale $532-1 = 105$. L'equazione 105 di equilibrio di forza nodale è:

$$F_{105} = K_{105,1} \delta_1 + K_{105,2} \delta_2 + \dots + K_{105,105} \delta_{105} + \dots + K_{105,193} \delta_{193} + K_{105,194} \delta_{194} \quad (2.7.1)$$

Tale equazione è un'equazione elastica, nel senso che i coefficienti K_{ij} sono coefficienti elastici di influenza, che collegano le 194 componenti di forza nodale, F_i , alle 194 componenti di spostamento nodale, δ_j . Questa **equazione elastica** va cambiata in una **equazione geometrica**, tale che cioè esprima il vincolamento del grado di libertà 105, tale cioè che la sua soluzione sia, come richiesto dal vincolamento del nodo 53 lungo x , $\delta_{105} = 0$, indipendentemente dai valori assunti da tutte le altre $194-1 = 193$ componenti di spostamenti nodali.

A questo scopo l'equazione (2.7.1) va alterata nel modo seguente. Relativamente alla matrice di rigidezza, tutti i coefficienti $K_{105,j}$ vanno annullati, tranne il termine diagonale $K_{105,105}$, che va posto uguale ad 1. Relativamente al vettore dei termini noti, che raggruppa le forze esterne imposte, si deve attribuire al termine F_{105} il valore dello spostamento

imposto, in questo caso il numero 0 . Proprio il fatto che il termine noto corrispondente al grado di libertà 105 non rappresenti più una forza ma uno spostamento, tradisce la nuova natura geometrica, e non più elastica, dell'equazione di indice 105 . L'equazione (2.7.1) diventa:

$$0 = 0 \times \delta_1 + 0 \times \delta_2 + \dots + 1 \times \delta_{105} + \dots + 0 \times \delta_{193} + 0 \times \delta_{194} \Rightarrow$$

$$0 = 1 \times \delta_{105}$$
(2.7.2)

Nell'equazione (2.7.2) l'incognita è δ_{105} . La soluzione di tale equazione è immediatamente $\delta_{105} = 0$, **indipendentemente da tutti gli altri valori di spostamento δ_j** .

Si considera nel seguito, sempre in relazione al vincolamento del grado di libertà 105 , non solo l'equazione 105 , ma la matrice di rigidezza della struttura nel suo complesso, prima che in essa vengano effettuate le modifiche che esprimono il vincolamento del grado di libertà 105 .

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{105} \\ \vdots \\ F_{193} \\ F_{194} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & K_{1,105} & \cdot & K_{1,193} & K_{1,194} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdot & K_{2,105} & \cdot & K_{2,193} & K_{2,194} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{105,1} & K_{105,2} & \cdot & K_{105,105} & \cdot & K_{105,193} & K_{105,194} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{193,1} & K_{193,2} & \cdot & K_{193,105} & \cdot & K_{193,193} & K_{193,194} \\ K_{194,1} & K_{194,2} & \cdot & K_{194,105} & \cdot & K_{194,193} & K_{194,194} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{105} \\ \vdots \\ \delta_{193} \\ \delta_{194} \end{Bmatrix}$$
(2.7.3)

Introducendo nella matrice di rigidezza e nel termine noto le modifiche imposte dal vincolamento del grado di libertà 105 , si ottiene:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ F_{193} \\ F_{194} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & K_{1,105} & \cdot & K_{1,193} & K_{1,194} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \cdot & K_{2,105} & \cdot & K_{2,193} & K_{2,194} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdot & \vdots & \cdot & \vdots & \vdots \\ K_{193,1} & K_{193,2} & \cdot & K_{193,105} & \cdot & K_{193,193} & K_{193,194} \\ K_{194,1} & K_{194,2} & \cdot & K_{194,105} & \cdot & K_{194,193} & K_{194,194} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_{105} \\ \vdots \\ \delta_{193} \\ \delta_{194} \end{Bmatrix} \quad (2.7.4)$$

La matrice di rigidezza nella (2.7.4) , che prima del vincolamento era simmetrica, perde la sua simmetria in seguito alle modifiche di vincolamento. Tale fatto è particolarmente nocivo dato che i solutori del sistema di equazioni lineari del tipo (2.7.4) che si impiegano nei programmi commerciali traggono vantaggio dalla simmetria della matrice di rigidezza, riducendo considerevolmente il numero di operazioni necessarie alla definizione delle incognite, rispetto ad un solutore che non sfrutta la simmetria della matrice di rigidezza della struttura.

Ci si domanda quindi se è lecito annullare tutti i termini della colonna 105 , oltre che quelli della riga 105 , tranne il termine diagonale, che diventa unitario. La risposta è affermativa nel caso di spostamento imposto nullo. Infatti, dato che δ_{105} è stato imposto uguale a 0 tramite la modifica effettuata sulla equazione 105 , i prodotti $K_{n,105} \delta_{105}$, con $n \neq 105$, risultano tutti nulli, dato che appunto $\delta_{105} = 0$. Se quindi i prodotti $K_{n,105} \delta_{105}$ sono tutti nulli non solo perché $\delta_{105} = 0$, ma anche perché $K_{n,105}$ è stato imposto uguale a 0 (sempre con $n \neq 105$) , non si apporta alcuna ulteriore modifica al sistema di equazioni lineari espresso in forma matriciale in (2.7.4) . Si conclude che, nel caso di spostamento imposto nullo relativo al grado di libertà n , è lecito annullare non solo i coefficienti della riga n della matrice di rigidezza, ma anche i coefficienti della colonna n , tranne il termine diagonale, che va posto uguale ad 1 . La matrice di rigidezza ed il vettore dei termini noti sono quindi:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ F_{193} \\ F_{194} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{1,193} & K_{1,194} \\ K_{2,1} & K_{2,1} & \cdot & 0 & \cdot & K_{2,193} & K_{2,194} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{193,1} & K_{193,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{193,193} & K_{193,194} \\ K_{194,1} & K_{194,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{194,193} & K_{194,194} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_{105} \\ \cdot \\ \delta_{193} \\ \delta_{194} \end{Bmatrix} \quad (2.7.5)$$

Si sottolinea che in questa versione del vincolamento la matrice di rigidezza rimane simmetrica, aspetto che consente di conservare vantaggi computazionali.

Si è già notato che è lecito annullare termini di riga e di colonna soltanto se lo spostamento imposto è nullo. Uno spostamento imposto nullo è caratteristico di una zona incastrata della struttura, zona i cui nodi non devono spostarsi perché incastrati. Se invece si pensa ad una guarnizione elastomerica compressa per esempio del 10% , i nodi del modello discretizzato della guarnizione a contatto col piano di schiacciamento della guarnizione devono spostarsi, per simulare la compressione della guarnizione stessa. In questo caso si impongono quindi schiacciamenti non nulli.

Si considera nel seguito come alterare la matrice di rigidezza ed il vettore dei termini noti, in modo che la componente di spostamento $_{105}$ assuma un valore non nullo, per esempio valga 10 . Occorre, similmente a quanto già fatto nel caso di spostamento imposto nullo, modificare l'equazione 105 in modo che $_{105}$ valga 10 . Basta quindi annullare tutti i coefficienti della matrice di rigidezza della struttura della riga 105 , tranne il termine diagonale, che deve essere imposto uguale ad 1 , ed inoltre occorre porre il termine F_{105} uguale allo spostamento imposto 10 . Si ottiene:

$$\begin{aligned} 10 &= 0 \times \delta_1 + 0 \times \delta_2 + \dots + 1 \times \delta_{105} + \dots + 0 \times \delta_{193} + 0 \times \delta_{194} \Rightarrow \\ 10 &= 1 \times \delta_{105} \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

Le modifiche al sistema di equazioni espresse in modo matriciale sono:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ 10 \\ \cdot \\ F_{193} \\ F_{194} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & K_{1,105} & \cdot & K_{1,193} & K_{1,194} \\ K_{2,1} & K_{2,1} & \cdot & K_{2,105} & \cdot & K_{2,193} & K_{2,194} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{193,1} & K_{193,2} & \cdot & K_{193,105} & \cdot & K_{193,193} & K_{193,194} \\ K_{194,1} & K_{194,2} & \cdot & K_{194,105} & \cdot & K_{194,193} & K_{194,194} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_{105} \\ \cdot \\ \delta_{193} \\ \delta_{194} \end{Bmatrix} \quad (2.7.7)$$

Anche questa volta, la matrice di rigidezza nella (2.7.7) , che prima del vincolamento era simmetrica, perde la sua simmetria in seguito alle modifiche di vincolamento. Ci si chiede quindi se è lecito annullare tutti i termini della colonna 105 , oltre che quelli della riga 105 , tranne il termine diagonale, che diventa unitario. La risposta è negativa nel caso di spostamento imposto non nullo. Infatti, dato che δ_{105} è stato imposto uguale a 10 tramite l'alterazione compiuta sulla equazione 105 , i prodotti $K_{n,105} \delta_{105}$, con $n \neq 105$, risultano generalmente non nulli, dato che appunto $\delta_{105} = 10$. Si noti però che adesso i prodotti $K_{n,105} \delta_{105}$ sono diventati termini conosciuti perché $K_{n,105}$ è noto, e anche δ_{105} è noto e vale 10 . Allora il posto naturale di tali prodotti diventa il vettore dei termini noti, che va aggiornato come mostrato nel seguito, mentre la colonna $K_{n,105}$ (con $n \neq 105$) rimane svuotata del suo termine, spostato ai termini noti, e quindi può essere posta uguale a 0 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 - K_{1,105} \delta_{105} \\ F_2 - K_{2,105} \delta_{105} \\ \cdot \\ 10 \\ \cdot \\ F_{193} - K_{193,105} \delta_{105} \\ F_{194} - K_{194,105} \delta_{105} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{1,193} & K_{1,194} \\ K_{2,1} & K_{2,1} & \cdot & 0 & \cdot & K_{2,193} & K_{2,194} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{193,1} & K_{193,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{193,193} & K_{193,194} \\ K_{194,1} & K_{194,2} & \cdot & 0 & \cdot & K_{194,193} & K_{194,194} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \cdot \\ \delta_{105} \\ \cdot \\ \delta_{193} \\ \delta_{194} \end{Bmatrix} \quad (2.7.8)$$

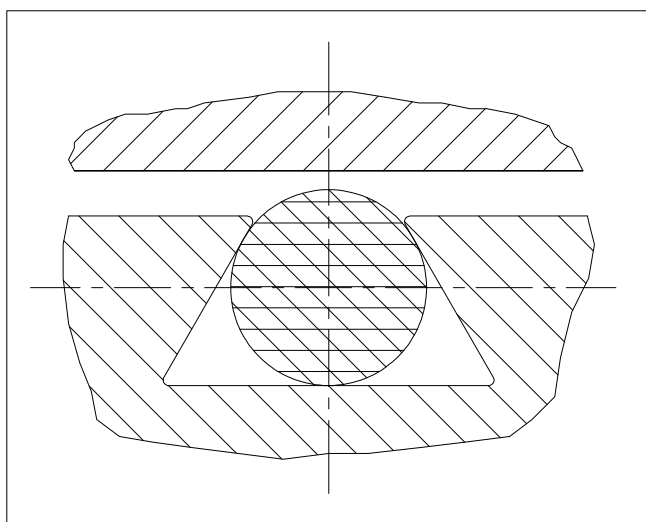


Figura 2.7.1

Si noti che con questa versione del vincolamento la matrice di rigidezza rimane simmetrica.

Se si vincolano simultaneamente i due gradi di libertà di un nodo, si modella una cerniera, dato che soltanto la rotazione non è preclusa. Se invece si vincola soltanto una delle due direzioni tra loro ortogonali, si modella un carrello, dato che il nodo si può spostare liberamente lungo una

direzione ma non lungo la direzione ortogonale. Se si vuole imporre che una zona della struttura sia incastrata, tutti i nodi di quella zona vanno vincolati come cerniere, in modo da imporre spostamenti nulli in tale zona.

Si osserva infine che in questo Paragrafo si è considerato soltanto un vincolamento lungo gli assi coordinati x e y , e non un vincolamento lungo direzioni non orizzontali o verticali, ma inclinate. In pratica però si può incontrare la necessità di imporre carrelli non orientati lungo gli assi coordinati, ma lungo direzioni oblique. Si consideri per esempio il caso di una guarnizione inserita in una cava a coda di rondine, Figura 2.7.1. Il contatto tra guarnizione e pareti inclinate della cava, se assunto senza attrito, deve essere simulato con carrelli obliqui.

Si dimostra inoltre che la matrice di rigidezza della struttura, che era semidefinita positiva prima dell'imposizione del vincolamento, dopo tale imposizione diventa definita positiva, e quindi non singolare, e quindi invertibile.

2.8 Soluzione in termini di spostamenti e calcolo delle tensioni

Una volta che la matrice di rigidezza ed il vettore dei termini noti sono stati modificati per esprimere il vincolamento nodale, il sistema di equazioni lineari le cui incognite sono gli spostamenti nodali è pronto per essere risolto, fornendo appunto i valori delle componenti lungo x ed y degli spostamenti per tutti i nodi della struttura. Tuttavia da un punto di vista progettuale gli spostamenti sono raramente il dato più significativo, mentre risulta più rilevante calcolare le tensioni, la conoscenza delle quali permette di effettuare calcoli a resistenza della struttura.

Le tensioni si calcolano elemento per elemento dalla conoscenza delle sei componenti di spostamento, tre lungo x e tre lungo y , dei tre vertici di ogni elemento triangolare, vertici che arrivano a tre nodi della struttura. Operativamente, si ricalcola elemento per elemento la matrice 3×6 \mathbf{B} dell'elemento, la si moltiplica per il vettore delle sei componenti di spostamento nodale relativo ai tre vertici dell'elemento in questione, ottenendo così le tre deformazioni all'interno dell'elemento. Infine, le deformazioni vengono moltiplicate per la matrice 3×3 \mathbf{D} che esprime la legge di Hooke, ottenendo le tre tensioni :

$$\sigma = \mathbf{D} \mathbf{B} \delta \quad (2.8.1)$$

Questo calcolo delle tensioni chiude la risoluzione di un problema strutturale agli Elementi Finiti.

2.9 Confronto tra la teoria degli Elementi Finiti e la soluzione di un tubo

Si propone il seguente confronto tra la soluzione analitica delle tensioni e deformazioni in un tubo e la teoria approssimata degli Elementi Finiti.

| Tubo | Elementi Finiti |
|---|---|
| Equazione di equilibrio in termini di | |
| Equazione di equilibrio in termini di | |
| Equazione di equilibrio in termini di u | |
| Soluzione esatta in u | Imposizione funzione approssimata in u,v |
| Calcolo da u | Calcolo in funzione di u,v |
| Calcolo da | Calcolo in funzione di u,v |
| Imposizione condizioni al contorno | Imposizione carichi e vincoli |
| | Soluzione approssimata in u,v |
| | Calcolo approssimato da u,v |
| | Calcolo approssimato da |

3 Principi di corretta meshatura

Il campo tensionale e deformativo ottenuto con gli Elementi Finiti cambia al variare del mesh impiegato per discretizzare l'organo meccanico. Alcuni tipi di mesh forniscono, a parità di numero di nodi e di elementi, risultati più accurati. Si elencano nel seguito alcuni principi che devono guidare il progettista nella discretizzazione del componente meccanico.

Occorre infittire il mesh dove si prevedono alti gradienti di tensione.

È necessario impiegare un mesh che passi gradualmente dalle zone meshate fitte alle zone a mesh rado, evitando che un nodo sia circondato da elementi ad area molto diversa tra loro.

Occorre evitare di impiegare elementi finiti molto distorti, per esempio un triangolo molto allungato od un elemento quadrilatero a forma di rombo molto allungato. Se si lavora in grandi deformazioni, occorre anche evitare che il mesh **deformato** diventi molto distorto.

La Figura 3.1 presenta il mesh tridimensionale di un piede di biella.

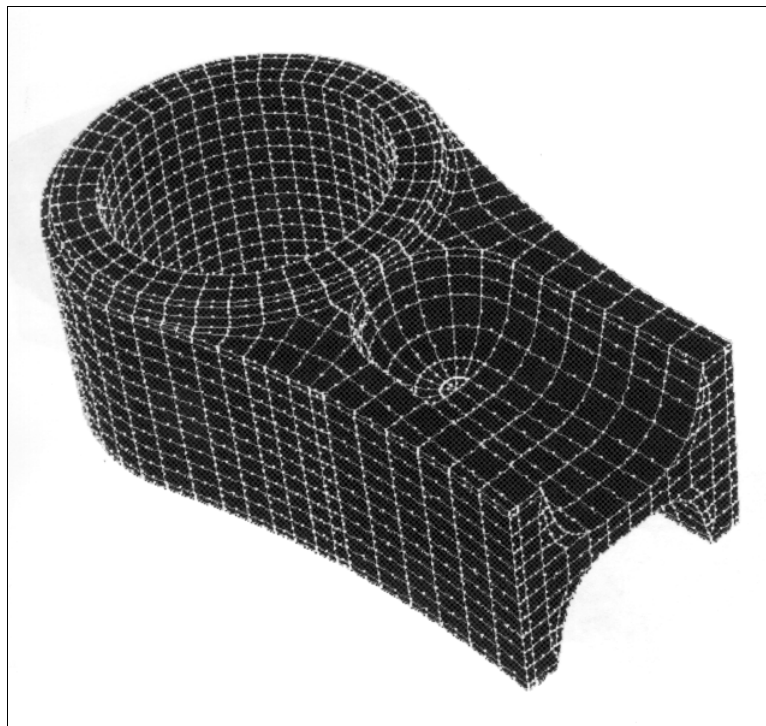


Figura 3.1

4 Esercizi risolti

4.1 Si consideri la struttura di Figura 4.1.1 (a) , caricata da un sistema di forze autoequilibrate P . Tale struttura è labile, dato che ammette moti rigidi.

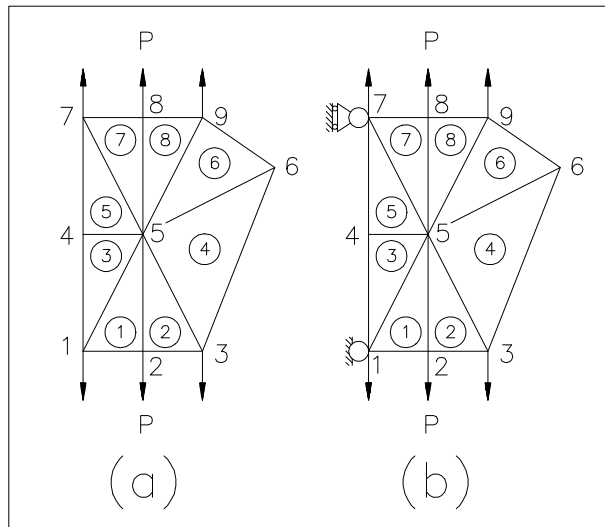


Figura 4.1.1

Di conseguenza gli spostamenti sono determinati a meno di componenti rigidi, e quindi non sono univocamente definiti. Da un punto di vista matematico, la matrice di rigidezza della struttura non è definita positiva, ma semidefinita positiva, e quindi non invertibile. Per poter risolvere agli Elementi Finiti la struttura di Figura 4.1.1 (a) , occorre quindi eliminare i moti rigidi, vincolandola però in modo da non introdurre indesiderate costrizioni non fisiche. La Figura 4.1.1 (b) presenta, tra i vari possibili, un vincolamento corretto, costituito da una cerniera al nodo 1 e da un carrello al nodo 7 , vincolamento che non limita la possibilità della struttura di deformarsi, ma preclude soltanto gli indesiderati moti rigidi. In altre parole, i vincoli introdotti non assorbono alcuna reazione vincolare. Con l'imposizione di questo vincolamento, la matrice di rigidezza della struttura diventa definita positiva e quindi invertibile.

4.2 La Figura 4.2.1 (a) rappresenta il mesh di un quarto di tubo soggetto ad una pressione interna p . La struttura di Figura 4.2.1 (a) non è però

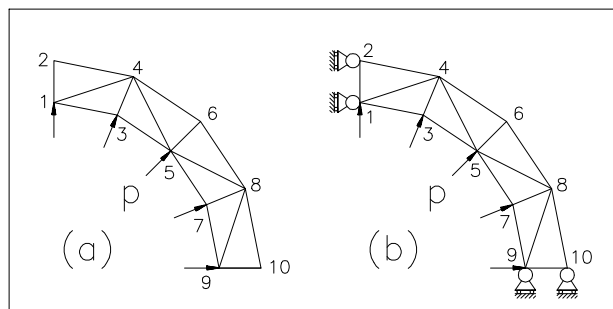


Figura 4.2.1

equilibrata, ed è anche soggetta a moti rigidi, per cui occorre introdurre vincoli in grado di eliminare i moti rigidi. La Figura 4.2.1 (b) mostra un corretto vincolamento, che consiste nell'imporre carrelli scorrevoli in direzione verticale ai nodi 1 e 2 , e scorrevoli in direzione orizzontale ai nodi 9 e 10 . Tali carrelli impongono la costrizione che le due sezioni del tubo corrispondenti alla coppia di nodi 1 e 2 , e 9 e 10 , possono soltanto spostarsi radialmente, coerentemente con la fisicità del problema.

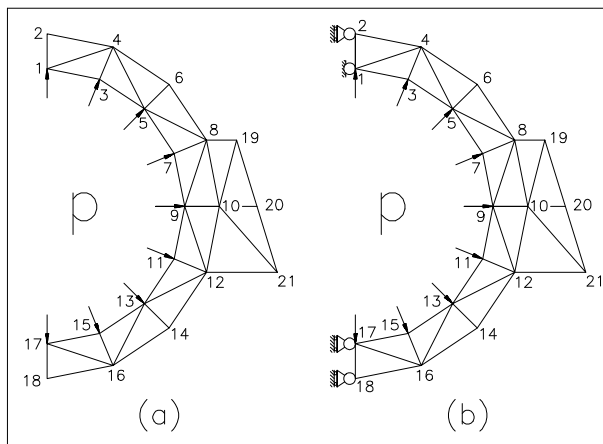
L'impiego di un vincolo a cerniera sarebbe scorretto, perché impedirebbe gli spostamenti radiali del tubo, che sono fisicamente possibili.

I vincoli producono in questo caso reazioni vincolari, a differenza della struttura di Figura 4.1.1, dove i vincoli introdotti per eliminare i moti rigidi non producevano reazioni vincolari.

Si osserva che le forze applicate ai nodi 1 e 9, derivanti dagli effetti della pressione p , devono possedere una intensità inferiore alle rimanenti forze, coerentemente con le osservazioni svolte nel Paragrafo 2.6.

Si nota infine che, approfittando della assialsimmetria geometrica e di caricamento del tubo, si è potuta studiare soltanto una parte di tale struttura. Se il programma agli Elementi Finiti include tra i vincoli soltanto carrelli scorrevoli lungo due direzioni tra loro ortogonali, e non consente carrelli obliqui, la parte più piccola di una struttura assialsimmetrica, quale il tubo, che si può esaminare, è un quarto di struttura. Se però si hanno a disposizione carrelli obliqui, basta studiare una fila radiale di elementi finiti, e quindi una struttura con un numero di nodi molto inferiore.

4.3 La Figura 4.3.1 (a) rappresenta la discretizzazione di metà di un tubo con due sporgenze alle estremità del diametro orizzontale, soggetto a



pressione interna p . La struttura di Figura 4.3.1 (a) non è equilibrata in direzione orizzontale, ed è soggetta a moti rigidi. Occorre quindi introdurre vincoli che precludano i moti rigidi senza introdurre vincoli non fisici. A tal scopo, si impongono per esempio tre carrelli a scorrimento verticale ai nodi 2, 17, e 18, ed una cerniera al nodo 1. Se si fossero impiegati quattro carrelli, la

struttura sarebbe stata ancora labile verticalmente. Si confronti questo caso con quello di Figura 4.2.1.

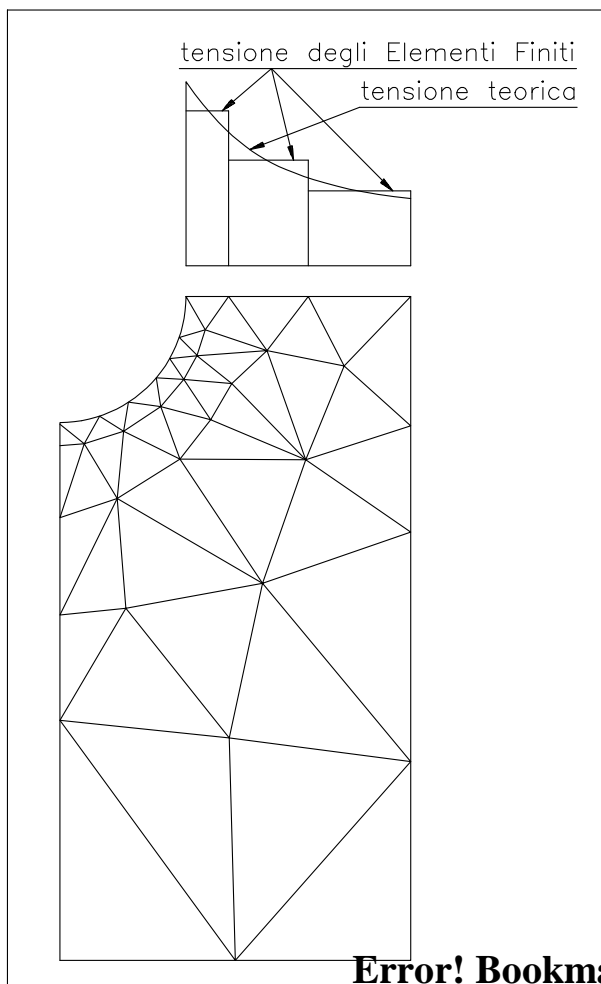
Si noti che, a causa delle sporgenze non simmetriche nel tubo, non si può studiare soltanto un quarto di tubo, ma occorre considerarne al minimo metà.

4.4 Gli Elementi Finiti vengono spesso impiegati per valutare il Fattore di Forma relativo alla concentrazione di tensioni in organi con intagli. Tuttavia si è notato che, quando sono disponibili valori esatti di k , e quindi è possibile esaminare la precisione dei risultati ottenuti con gli Elementi Finiti, tali risultati numerici tendono a fornire valori di k lievemente inferiori a quelli esatti, pur non essendo questo risultato di validità generale.

Si esaminano nel seguito le ragioni fisiche che portano a questa sottostima di k . La Figura 4.4.1 mostra il mesh di un quarto di una piastra forata. Gli Elementi Finiti forniscono una tensione costante all'interno di ogni elemento, tensione rappresentata tramite un istogramma in Figura 4.4.1. Tale tensione numerica è in genere molto prossima al valore medio, sull'elemento finito, della tensione esatta. (Più esattamente, gli Elementi Finiti forniscono un valore accurato della media dell'energia, più che della tensione.) Di conseguenza, in presenza di alti gradienti tensionali, quali quelli incontrati in prossimità di intagli, il valore tensionale medio sottostima il valore massimo, e questo fatto giustifica il risultato che gli Elementi Finiti in genere sottostimano il picco reale di tensione, e quindi sottostimano anche k . Infittendo il mesh, si ottengono risultati progressivamente più accurati.

Questa tendenza a sottostimare le tensioni massime è più accentuata

con elementi finiti meno capaci di esprimere alti gradienti tensionali, e quindi gli elementi finiti triangolari, caratterizzati da tensione costante al loro interno, risultano i meno indicati a rappresentare alti gradienti tensionali.



Error! Bookmark not defined.

Figura 4.4.1

5 Esercizi proposti

5.1 Disegnare tre mesh formati da elementi finiti triangolari, il primo nel quale il numero di nodi è minore del numero di elementi, il secondo nel quale il numero di nodi è uguale al numero di elementi, ed il terzo nel quale il numero di nodi è maggiore del numero di elementi.

5.2 Per ottenere che un nodo abbia uno spostamento imposto, nullo o non nullo, si attribuisce (tra l'altro) il valore 1 al coefficiente diagonale nella riga della matrice di rigidezza relativa al grado di libertà del nodo vincolato. Il vincolamento funziona correttamente anche attribuendo al termine diagonale un termine diverso da 1, per esempio 2 ? Si suggerisce di distinguere tra spostamento imposto nullo e non nullo.

5.3 Una tecnica di vincolamento dello spostamento incognito i , alternativa a quella presentata nel Paragrafo 2.7, consiste nel definire un numero molto alto C , per esempio $C = 1.10^7$, nel moltiplicare per C il coefficiente diagonale $k_{i,i}$ nella riga della matrice di rigidezza relativa al grado di libertà i del nodo vincolato, ed infine nel sostituire al termine noto della stessa riga lo spostamento imposto u_i moltiplicato per C $k_{i,i}$. L'equazione espressa da tale riga è formata da molti termini piccoli relativamente a quelli che contengono C . Trascurando i termini piccoli, tale equazione diventa:

$$C k_{i,i} u_i = C k_{i,i} \delta_i \Rightarrow \delta_i = u_i$$

e quindi lo spostamento incognito i assume il valore dello spostamento imposto u_i , come richiesto. Tale tecnica è più semplice di quella presentata nel Paragrafo 2.7, dato che non prevede alterazioni di tutti i termini di riga e colonna, ma è più imprecisa. In particolare, si è notato che tale tecnica può produrre errori rilevanti nel calcolo delle tensioni nel caso di materiali scarsamente comprimibili. Spiegare le ragioni fisiche di questo cattivo comportamento.

5.4 Si esamini se l'elemento finito triangolare è autoequilibrato, oltre che alla traslazione, anche alla rotazione.

5.5 Si consideri una biella automobilistica. La si approssimi come problema piano, e si consideri il suo caricamento al punto morto superiore

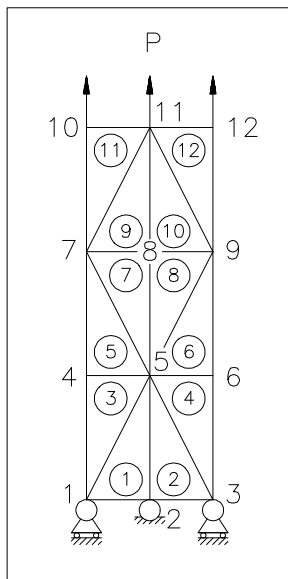


Figura 5.6.1

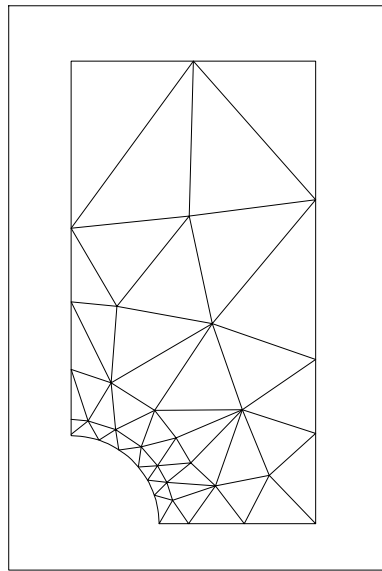


Figura 5.7.1

in fase di combustione e di incrocio. Studiare come caricare la biella, e come approfittare delle simmetrie geometrica e di carico.

5.6 Si consideri la meshatura di Figura 5.6.1. Quali elementi finiti hanno la stessa matrice di rigidezza dell'elemento ?

5.7 Si esamini il mesh di Figura 5.7.1. Si discuta come vincolarlo e caricarlo in modo che esso

descriva correttamente: 1) una lastra forata; 2) una lastra lateralmente doppiamente intagliata; 3) una lastra con infiniti fori in serie; 4) una lastra con infiniti fori in parallelo.

5.8 Con gli Elementi Finiti si può simulare con precisione il problema di una forza concentrata trasversale applicata per esempio ad un semipiano deformabile, oppure gli Elementi Finiti tendono a fornire un risultato sempre relativo ad un carico distribuito anche se su di una zona ristretta, e mai veramente concentrato?

5.9 Si è finora considerato soltanto un vincolamento a spostamento imposto. Si consideri nel seguito un vincolo cedevole alla Winkler, caratterizzato da una cedevolezza nota k , ed agente su di un solo nodo della struttura in direzione x . Si esamini come occorre alterare la matrice di rigidezza per simulare tale vincolo cedevole.

5.10 Impiegando la terminologia dell'Effetto Intaglio, le tensioni calcolate col metodo degli Elementi Finiti, almeno nella sua formulazione più semplice, quella sviluppata in questo testo, sono tensioni nominali, teoriche, od effettive?

5.11 Quando gli Elementi Finiti vengono impiegati per descrivere una trave incastrata ad una estremità e caricata da una forza trasversale all'altra estremità, caso per il quale è disponibile la soluzione esatta, si nota che gli

spostamenti numerici risultano apprezzabilmente più precisi delle tensioni numeriche. Interpretare fisicamente questo risultato.

5.12 In Figura 5.12.1 è rappresentato un semplice mesh formato da elementi triangolari piani, nella configurazione indeformata e deformata. Nel mesh deformato si è rappresentata una apertura tra gli elementi finiti (1) e (2). Discutere se tale apertura è matematicamente coerente con la teoria degli elementi finiti triangolari. Discutere inoltre se tale apertura è compatibile con la teoria di un elemento finito quadrilatero sviluppato secondo il Paragrafo 2.1.1 , ed eventualmente criticare una teoria di un elemento quadrangolare che permetta che avvengano aperture tra elementi adiacenti.

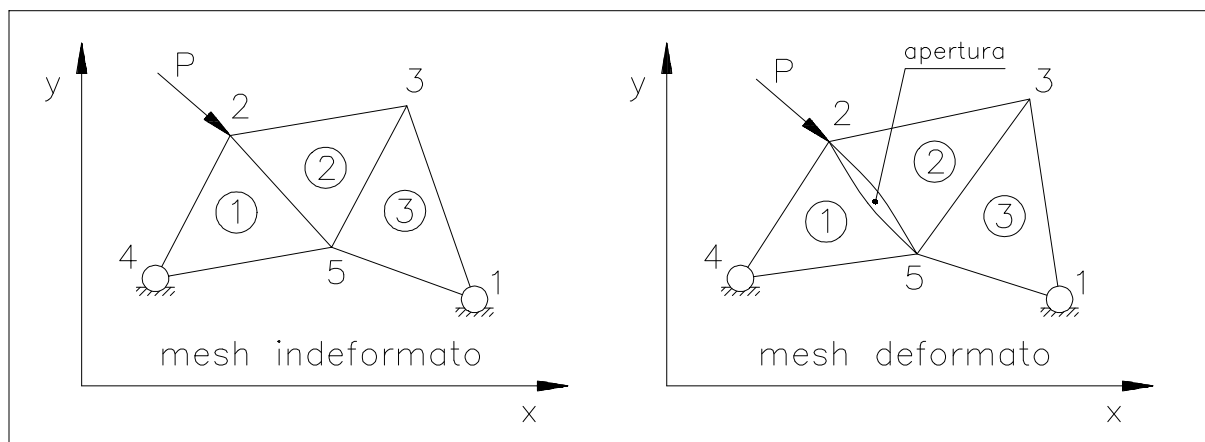


Figura 5.12.1

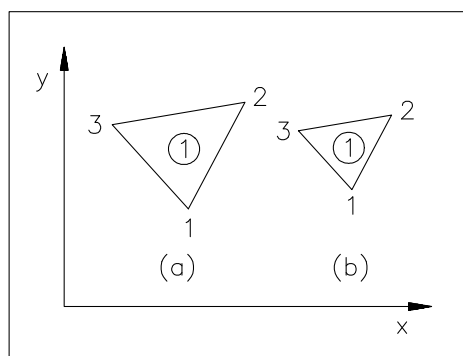


Figura 5.13.1

5.13 In Figura 5.13.1 sono rappresentati due elementi finiti triangolari (a) e (b) di forma uguale ma di dimensioni differenti. Quale dei due elementi finiti è più rigido, e cioè si deforma di meno quando viene assoggettato a carichi imposti? In altre parole, quale elemento finito possiede la matrice di rigidezza con termini maggiori in valore assoluto?

5.14 In Figura 5.14.1 è rappresentata una semplice struttura discretizzata con tre mesh differenti, (a) , (b) , (c) , e soggetta ad un carico P applicato al nodo 4 . I nodi lungo tre lati della struttura sono incernierati. Individuare su basi fisiche quale meshatura è più cedevole rispetto al carico P , e cioè quale meshatura produce il massimo spostamento lungo x del nodo 4 .

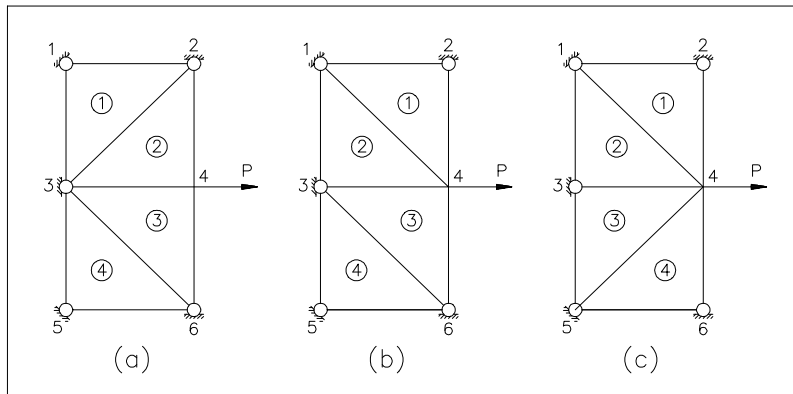


Figura 5.14.1

5.15 Si consideri un problema di contatto tra corpi deformabili, risolto agli Elementi Finiti. La teoria dei problemi di contatto indica che la tensione perpendicolare al profilo di contatto si deve trasmettere con continuità nel passaggio da un corpo all'altro, si veda il Capitolo sui Problemi di Contatto. La soluzione agli elementi finiti rispetta questa proprietà esattamente oppure soltanto in modo approssimato?

5.16 Si consideri il mesh di Figura 5.16.1 , estratto dalla bibliografia pertinente, che rappresenta un quarto di tubo a profilo interno circolare ed esterno quadrato, soggetto ad una interferenza radiale al bordo interno in grado di produrre elastoplasticità nel tubo. (In pratica, un tampone viene forzato con interferenza nel foro.) Tenendo conto delle simmetrie di geometria e di carico, discutere se l'aver meshato un quarto di tubo rappresenta la soluzione numericamente più vantaggiosa.

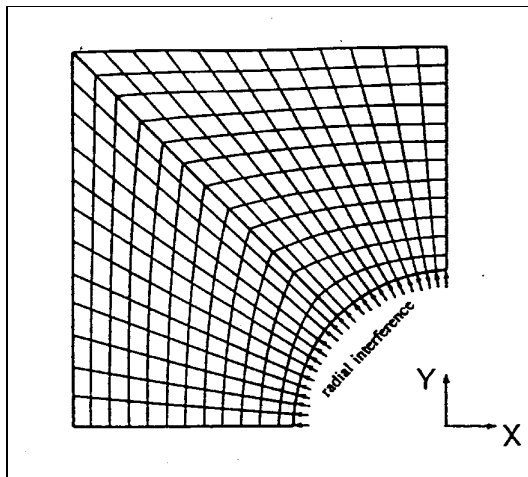


Figura 5.16.1

6 Libri sugli Elementi Finiti

BECKER, E.B. , CAREY, G.F., ODEN, J.T. (1981). *Finite elements, an introduction*. Prentice-Hall, New Jersey.

COOK, R.D. , MALKUS, D.S. , PLESHA, M.E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley&Sons, N.Y.

ZIENKIEWICZ, O.C. (1977). *The finite element method*. McGraw-Hill, London.

7 Articoli sugli Elementi Finiti

CHAN, Y.W. (1994). *Measurement of in plane residual displacement due to interference fitting by TV-holographic interferometry*. Strain, August, pp. 91-94 .

Il caricamento continuo lineare è coerente coi Lavori Virtuali

Contatti : gli Elementi Finiti sono insostituibili perche' soluzioni teoriche sono troppo complesse. Caso dello spinotto automobilistico.

I termini diagonali della matrice di rigidezza sono positivi.

- +Carichi distribuiti: come cambiarli in concentrati
- +Quanti termini al massimo sono non nulli per riga
- +Vincolamento: matrice definita positiva
- +La simmetria della matrice di rigidezza dell'elemento finito e la simmetria della matrice di rigidezza globale
- +Equilibrio delle forze nell'elemento finito triangolare
- +Matrice di rigidezza simmetrica e semidefinita positiva
- +paragone tubi-elementi finiti
- +Lavori virtuali: calcolo in media
- +I lavori virtuali vengono usati per trovare una soluzione approssimata e non esatta.
- +Parti collegate ai nodi, parti collegate agli elementi
- +Tensioni e deformazioni generalizzate
- +Vincoli obliqui
- +funzioni con gli alpha per l'elemento quadrato

Esercizi:

Piede di biella piano: metà spinotto

Mesh: elemento triangolare molto lungo

Mesh:esempio della derivata seconda

?Caso assialsimmetrico sezionato lungo l'asse di simmetria

- +Non si possono simulare carichi concentrati: esempio Boussinesque
- +Gli Elementi Finiti sono più precisi sugli spostamenti
- +disegnare un mesh con element triangolari, in cui il numero di nodi è minore, uguale o maggiore del numero dei nodi.
- +Vincolo a spostamento imposto nullo: numero 1 in diagonale principale, anche diverso da 1
- +Vincolamento con numeri diagonali molto grandi
- +In un mesh, quali elementi finiti hanno la stessa matrice di rigidezza
- +Piastra forata. Con vincoli diversi, quali strutture può descrivere?

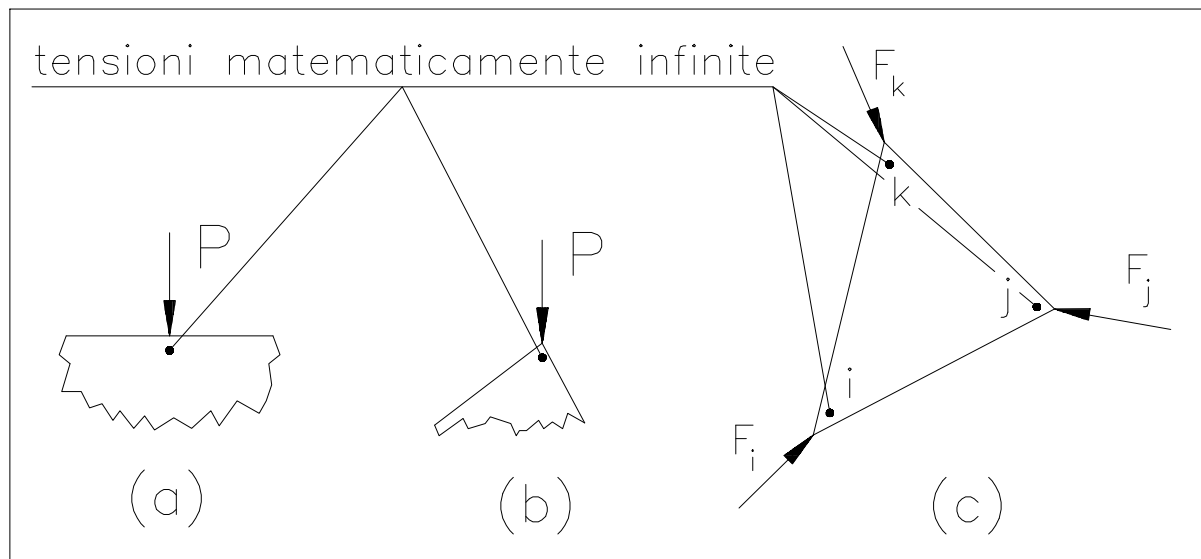


Figura 2.4.2

- +Strutture e vincolamenti: trave con carichi autoequilibrati. Tubo: 1/2 e 1/4 .
- +Sottostima dell'alfak
- +Errore di mesh di tubo quadrato esterno e circolare interno
- +Bibliografia tubo!