

Appunti per il corso di Progettazione Assistita

Enrico Bertocchi

May 6, 2014

1 Relazioni cinematiche di dipendenza tra gradi di libertà

1.1 Servo-link

Sia dato un sistema di n gradi di libertà (gg.d.l.) δ_i , e siano definite n componenti di azione esterna F_i agenti (compienti lavoro) su tali gg.d.l., e sia definito un sistema di reazioni elastiche associate allo scostamento di tali gg.d.l. dal valore nullo nella forma $-k_{ij}\delta_j$. Siano

$$\underline{K}\underline{\delta} = \underline{F} \quad (1)$$

le equazioni di equilibrio ai vari gg.d.l. .

Si intende definire una relazione cinematica di dipendenza tra un g.d.l, nello specifico δ_j , ed i restanti $\delta_i, i \neq j$, nella forma

$$\delta_j = \sum_{i \neq j} \alpha_{ji} \delta_i + \Delta\delta_j \quad (2)$$

Il termine $\Delta\delta_j$ è stato introdotto per permettere uno scostamento dalla relazione cinematica stessa, e rappresenta uno spostamento *relativo* tra il termine di combinazione lineare e l'effettiva dislocazione del nodo. Tale termine e potrà successivamente essere ridotto a valore nullo (o in generale imposto) con le consuete metodologie di vincolamento del grado di libertà.

Tale relazione cinematica imposta è chiamata *servo-link* o *multi-point constraint (MPC)*, ed è tipicamente implementata nei codici in forma omogenea $\Delta\delta_j = 0$.

Se la forma algebrica 2 lega i vari gg.d.l. senza indurre relazioni di subordinazione, l'imposizione della stessa in forma di *assegnazione* sancisce la condizione di dipendenza di δ_j dai restanti. Si dirà in particolare che δ_j è un g.d.l. *dipendente* (o *tied*) mentre i vari $\delta_i, i \neq j$ sono gg.d.l. *indipendenti* (anche detti *retained*¹).

In virtù della 2 sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{j,1} & \cdots & \alpha_{j,j-1} & 1 & \alpha_{j,j+1} & \cdots & \alpha_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{j-1} \\ \Delta\delta_j \\ \delta_{j+1} \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

ed in forma compatta

$$\underline{\delta} = \underline{L}\underline{\delta}^*, \quad (4)$$

che risulta essere un semplice cambiamento di base/componenti per la descrizione dello stato del sistema ad n gg.d.l..

¹Questa denominazione nasce da un'implementazione alternativa a quella qui descritta che vede un'eliminazione del g.d.l. dipendente con conseguente riduzione del numero delle incognite stesso. I gg.d.l. indipendenti sono invece "mantenuti" da cui la denominazione.

In particolare è possibile introdurre 3 entro 1 ottenendo il cambiamento di incognite

$$\underbrace{\underline{L}^T \underline{K} \underline{L}}_{\underline{K}^*} \delta^* = \underbrace{\underline{L}^T \underline{F}}_{\underline{F}^*} \quad (5)$$

ove la premoltiplicazione di ambo i membri per \underline{L}^T è stata introdotta per mantenere la simmetria del sistema, nonché una coerente definizione di lavoro virtuale delle azioni esterne nella forma

$$\partial \ell = \langle \underline{F}^*, \partial \delta^* \rangle \quad (6)$$

Andando infine ad analizzare in dettaglio il termine noto di 4, risulta in componenti che

$$F_i^* = F_i + \alpha_{ji} F_j, \quad i \neq j; \quad F_j^* = F_j, \quad (7)$$

ossia che la quota di azione esterna originariamente agente sul j -esimo g.d.l., ora reso dipendente, si ripartisce sugli altri gg.d.l. secondo gli stessi coefficienti α_{ji} che definiscono il legame cinematico.

1.2 Link di forze/momenti risultanti distribuiti RBE3

Si considera un nodo dipendente C di coordinate x_C, y_C, z_C , detto nodo di controllo (alle forze... altrimenti la definizione è impropria), ed una nuvola di n nodi indipendenti P_i di coordinate x_i, y_i, z_i e con peso relativo q_i .

Si considera applicato al nodo C un sistema di azioni esterne nella forma delle tre componenti di forza U_C, V_C, W_C e nelle tre componenti di momento Ω_C, Φ_C, Ψ_C , riunite nel vettore

$$\underline{F}_C = [U_C \ V_C \ W_C \ \Omega_C \ \Phi_C \ \Psi_C]^T$$

Si definisce un centro di massa G della nuvola di punti, le cui coordinate sono al solito

$$x_G = \frac{\sum_i q_i x_i}{\sum_i q_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i q_i y_i}{\sum_i q_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i q_i z_i}{\sum_i q_i}. \quad (8)$$

Si definisce quindi una prima relazione di dipendenza cinematica, per cui le rototraslazioni

$$\underline{\delta}_C = [u_C \ v_C \ w_C \ \theta_C \ \phi_C \ \psi_C]^T$$

di C sui tre assi x, y, z sono definite in funzione delle rototraslazioni

$$\underline{\delta}_G = [u_G \ v_G \ w_G \ \theta_G \ \phi_G \ \psi_G]^T$$

del centro di massa G secondo il vincolo di rototraslazione rigida

$$\begin{bmatrix} u_C \\ v_C \\ w_C \\ \theta_C \\ \phi_C \\ \psi_C \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & +(z_C - z_G) & -(y_C - y_G) \\ 0 & 1 & 0 & -(z_C - z_G) & 0 & +(x_C - x_G) \\ 0 & 0 & 1 & +(y_C - y_G) & -(x_C - x_G) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{CG}} \cdot \begin{bmatrix} u_G \\ v_G \\ w_G \\ \theta_G \\ \phi_G \\ \psi_G \end{bmatrix} \quad (9)$$

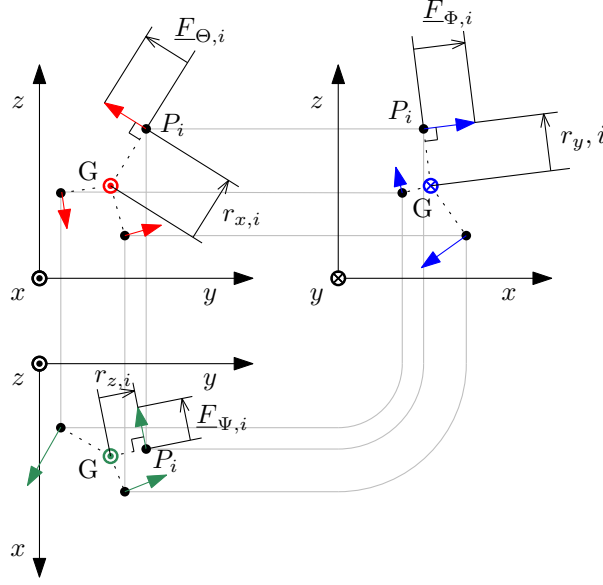


Figure 1: Schema distribuzione momenti

già visto per le RBE2.

Come osservato al paragrafo 1.1, all'imposizione di tali relazioni cinematiche è associata una riduzione a nuovo punto di applicazione G delle azioni agenti su C , con l'introduzione di opportuni momenti di trasporto come da

$$\underline{F}_G = [\underline{L}_{CG}]^T \cdot \underline{F}_C, \quad \underline{F}_G = [U_G \ V_G \ W_G \ \Theta_G \ \Phi_G \ \Psi_G]^T \quad (10)$$

Si definisce quindi una seconda relazione di dipendenza per cui da una parte lo spostamento del nodo G risulti la media pesata degli spostamenti ai nodi P_i , ovvero

$$u_G = \frac{\sum_i q_i u_i}{\sum_i q_i}, \quad v_G = \frac{\sum_i q_i v_i}{\sum_i q_i}, \quad w_G = \frac{\sum_i q_i w_i}{\sum_i q_i}, \quad (11)$$

e dall'altra le forze applicate in C e ridotte a G si distribuiscano ai nodi P_i secondo i pesi dati, ossia

$$U'_i = U_C \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad V'_i = V_C \frac{q_i}{\sum_i q_i}, \quad W'_i = W_C \frac{q_i}{\sum_i q_i}. \quad (12)$$

Per quanto riguarda la distribuzione dei momenti ridotti a G sui nodi P_i , si preferisce operare in termini di una seconda quota di forze nodali U''_i, V''_i, W''_i piuttosto che in termini di una quote momenti $\Theta'_i, \Phi'_i, \Psi'_i$.

Riferendosi a Figura 1, si considerano le componenti di momento Θ_G, Φ_G, Ψ_G singolarmente nella riduzione a sistemi di forze equivalenti.

Preso l'esempio particolare della componente z di momento Ψ_G , ad essa viene sostituito un sistema equivalente di forze $\underline{F}_{\Psi,i}$ distribuite ai punti P_i in sole componenti x, y tali da avere

- retta d'azione sul piano x, y , normale alla congiungente $G - P_i$ ivi proiettata

- verso coerente con il momento stesso
- modulo proporzionale alla distanza proiettata

$$r_{z,i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}, \quad \Delta x_i = x_i - x_G, \quad \Delta y_i = y_i - y_G \quad (13)$$

e al peso q_i del nodo

- momento risultante della distribuzione pari a $\Psi_G \hat{k}$

In particolare risulta

$$\underline{F}_{\Psi,i} = \frac{\Psi_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} (-\Delta y_i \hat{i} + \Delta x_i \hat{j}) \quad (14)$$

e, una volta definiti

$$r_{x,i} = \sqrt{\Delta y_i^2 + \Delta z_i^2}, \quad r_{y,i} = \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta x_i^2}, \quad \Delta z_i = z_i - z_G$$

si hanno per le altre componenti di momento le forme

$$\underline{F}_{\Theta,i} = \frac{\Theta_G q_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} (-\Delta z_i \hat{j} + \Delta y_i \hat{k}), \quad (15)$$

$$\underline{F}_{\Phi,i} = \frac{\Phi_G q_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} (-\Delta x_i \hat{k} + \Delta z_i \hat{i}) \quad (16)$$

le quali, raccolte per componenti e in notazione più compatta, danno

$$U_i'' \hat{i} + V_i'' \hat{j} + W_i'' \hat{k} = q_i \begin{bmatrix} \frac{\hat{i}}{\frac{\Theta_G}{\sum_j q_j r_{x,j}^2}} & \frac{\hat{j}}{\frac{\Phi_G}{\sum_j q_j r_{y,j}^2}} & \frac{\hat{k}}{\frac{\Psi_G}{\sum_j q_j r_{z,j}^2}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

I termini in 17 andranno sommati a quelli ricavati in 12, per cui la forza distribuita dal link RBE3 sull' i -esimo nodo risulterà

$$\underline{F}_i = U_i \hat{i} + V_i \hat{j} + W_i \hat{k} = (U_i' + U_i'') \hat{i} + (V_i' + V_i'') \hat{j} + (W_i' + W_i'') \hat{k} \quad (18)$$

o, in forma algebrica

$$\begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ \Theta_i \\ \Phi_i \\ \Psi_i \end{bmatrix} = q_i \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & -\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & 0 & -\frac{\Delta z_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & 0 & +\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{z,j}^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sum_j q_j} & +\frac{\Delta y_i}{\sum_j q_j r_{x,j}^2} & -\frac{\Delta x_i}{\sum_j q_j r_{y,j}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{L}}_{GP,i}^T} \begin{bmatrix} U_G \\ V_G \\ W_G \\ \Theta_G \\ \Phi_G \\ \Psi_G \end{bmatrix} \quad (19)$$

Tale relazione è definita in forma specifica per ogni nodo P_i .

Alla distribuzione di forza appena descritta è associata la forma agli spostamenti risulta

$$\underline{\delta}_G = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{L}_{GP,1} & \cdots & \underline{L}_{GP,i} & \cdots & \underline{L}_{GP,n} \end{bmatrix}}_{\underline{L}_{GP}} \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_i \\ \vdots \\ \underline{\delta}_n \end{bmatrix}}_{\underline{\delta}_{Vi}}^T \quad (20)$$

ove \underline{L}_{GP} e $\underline{\delta}_{Vi}$ sono definiti per blocchi.

Ricordando infine la 9 si può esprimere per il link RBE3 una condizione cinematica

$$\underline{\delta}_c = \underline{L}_{CG} \cdot \underline{L}_{GP} \cdot \underline{\delta}_{Vi} \quad (21)$$

ed una caratteristica di distribuzione delle forze ai nodi P_i

$$\underline{F}_i = \underline{L}_{GP,i}^T \cdot \underline{L}_{CG}^T \cdot \underline{F}_C, \quad i = 1 \dots n. \quad (22)$$

2 Algoritmo Newton-Raphson per sistemi di equazioni nonlineari

2.1 Iterazione base

Consideriamo un sistema lineare di n equazioni

$$\underline{R}(\underline{u}) = \underline{F}(\underline{u}) \quad (23)$$

nelle n componenti incognite del vettore \underline{u} , con

$$\underline{R} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\underline{F} : \underline{u} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \underline{u} \in C \subseteq \mathbb{R}^n$$

funzioni vettoriali di variabile vettoriale.

Nel caso specifico della soluzione di sistemi di equazioni derivate dagli equilibri nodali di strutture discretizzate con metodo FEM, ho

\underline{u} : vettore contenente le componenti di spostamento/rotazione nodale dalla configurazione indeformata (incognite);

$\underline{F}(\underline{u})$: vettore contenente le componenti di forza/coppia nodale applicate dall'esterno sul sistema, supposte note per una data configurazione della struttura ²;

$\underline{R}(\underline{u})$: vettore contenente le componenti di azione nodale necessarie a mantenere la struttura in equilibrio nello stato deformativo associato al vettore spostamenti nodali \underline{u} , *ovvero* vettore contenente le componenti di azione nodale associate (uguali e contrarie) alle reazioni elastiche della struttura costretta in stato deformato. Nel caso particolare di sistema elastico lineare $\underline{R}(\underline{u}) = \underline{K}\underline{u}$, con \underline{K} matrice di rigidezza.

Si nota che tale interpretazione dei termini dell'equazione 23 è appropriata nel caso le condizioni al contorno siano alle sole forze. Nel caso in cui siano definiti vincoli di spostamento nodale imposto alcune coppie di termini coniugati $R_l(\underline{u}), F_l(\underline{u})$ risulteranno modificate in quanto all'equazione di equilibrio l -esima si sostituisce l'identità cinematica tra spostamenti incognito ed imposto.

Una scrittura alternativa prevede la definizione e l'annullamento di un termine di residuo

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{0} \quad (24)$$

con

$$\underline{r}(\underline{u}) = \underline{R}(\underline{u}) - \underline{F}(\underline{u}) \quad (25)$$

Tale scrittura permette di riassumere in un unico termine le variazioni in \underline{u} di forze e reazioni elastiche, per cui risulta vantaggioso procedere con tale notazione.

Il metodo N-R è costruito a partire dallo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine dell'equazione 24 nell'intorno di un punto di iterato i -esimo \underline{u}^i , ossia

$$\underline{r}(\underline{u}^*) = \underline{r}(\underline{u}^i) + \underline{J}_r(\underline{u}^i) \cdot (\underline{u}^* - \underline{u}^i) + o(\underline{u}^* - \underline{u}^i) = \underline{0}. \quad (26)$$

²la dipendenza delle forze esterne dalla configurazione è stata inserita in questa trattazione per amor di generalità, nonché per includere entro la stessa fenomeni nonlineari specifici quali l'instabilità dei rotori o la pressurizzazione di membrane

In tale espressione³

$$[\underline{J}_r(\underline{u}^i)]_{l,m} = [\underline{J}_r^i]_{l,m} = \frac{\partial r_l}{\partial u_m} \Big|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (27)$$

è lo Jacobiano della funzione residuo r calcolato al punto \underline{u}^i , mentre \underline{u}^* è la soluzione esatta incognita; data la natura della funzione residuo risulta inoltre

$$\underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i - \underline{J}_F^i \quad (28)$$

ove

$$[\underline{J}_R^i]_{l,m} = \frac{\partial R_l}{\partial u_m} \Big|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad [\underline{J}_F^i]_{l,m} = \frac{\partial F_l}{\partial u_m} \Big|_{\underline{u}=\underline{u}^i}, \quad l, m = 1 \dots n \quad (29)$$

Notiamo che nel caso \underline{F} sia costante in \underline{u} si ha

$$\underline{J}_F^i = \underline{0} \Rightarrow \underline{J}_r^i = \underline{J}_R^i \quad (30)$$

Trascurando il termine di ordine superiore, l'identità 26 non risulterà più strettamente verificata; sostituendo tuttavia alla soluzione esatta \underline{u}^* un meno pretenzioso termine di iterato successivo \underline{u}^{i+1} ottengo la forma

$$\underline{J}_r^i(\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i) = -\underline{r}(\underline{u}^i) \quad (31)$$

da cui, supponendo \underline{J}_r^i non singolare ⁴

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i - \underline{J}_r^i \backslash \underline{r}(\underline{u}^i). \quad (32)$$

In notazione equivalente, posto

$$\delta \underline{u}^i \equiv \underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i, \quad \underline{K}^i \equiv \underline{J}_r^i, \quad \underline{r}^i \equiv \underline{r}(\underline{u}^i), \quad (33)$$

abbiamo l'espressione

$$\delta \underline{u}^i = -\underline{K}^i \backslash \underline{r}^i \quad (34)$$

nella quale è evidenziato il ruolo di matrice di rigidezza *tangente* che \underline{J}_r^i ricopre, in analogia al caso lineare.

Fornito infine un vettore di primo tentativo \underline{u}^0 , la 32 definisce una successione iterativa di termini che *potenzialmente* converge alla soluzione esatta \underline{u}^* .

Dovendo limitare ad un numero finito le iterazioni di 32 o 34, occorre definire dei criteri di convergenza (accettazione risultato, fine iterazione) nella forma di

- Convergenza ai residui: stop iterazione implicato da $\|\underline{r}(\underline{u}^{i+1})\| \leq \epsilon_r$, con ϵ_r errore (assoluto) ammesso ai residui;
- Convergenza alle incognite (“agli spostamenti” nello specifico FEM): stop iterazione implicato da $\|\underline{u}^{i+1} - \underline{u}^i\| = \|\delta \underline{u}^i\| \leq \epsilon_u$, con ϵ_u errore (assoluto) ammesso alle incognite.

³qui utilizzo la notazione per cui $[A]_{i,j}$ è l'elemento alla i -esima riga e j -esima colonna di A

⁴la notazione $\underline{x} = \underline{A} \backslash \underline{b}$ indica la soluzione di un sistema lineare di matrice \underline{A} , vettore termini noti \underline{b} , e l'assegnazione del risultato al vettore delle incognite \underline{x} .

L'implementazione di valori di tolleranza *relativa* per incognite e residui è ovviamente possibile (e in generale auspicabile) una volta individuati opportuni termini di riferimento in valore assoluto per forze e spostamenti.

La determinazione di tali valori di tolleranza ammissibile è un aspetto cruciale dell'analisi nonlineare in quanto la richiesta di una eccessiva precisione aumenta inutilmente i tempi di calcolo, mentre tolleranze molto lasche possono produrre soluzioni inaccurate.

Una possibile implementazione dell'algoritmo Newton-Raphson, iterazione base è riportata come Algorithm 1.

Algorithm 1 Iterato N-R base

Require: \underline{u}^0
Require: $\underline{r}(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato
Require: $\underline{\underline{J}}_r(\underline{u}^i)$ calcolabile $\forall \underline{u}^i$ di iterato, e non singolare
 $i \leftarrow 0$
while $(\|\underline{r}(\underline{u}^i)\| > \epsilon_F) \vee (i \geq 1 \wedge (\|\underline{u}^i - \underline{u}^{i-1}\| > \epsilon_u))$ **do**
 $\underline{\underline{K}}^i \leftarrow \underline{\underline{J}}_r(\underline{u}^i)$
 $\underline{r}^i \leftarrow \underline{r}(\underline{u}^i)$
 $\underline{\delta u}^i \leftarrow -\underline{\underline{K}}^i \setminus \underline{r}^i$
 $\underline{u}^{i+1} \leftarrow \underline{u}^i + \underline{\delta u}^i$
 $i \leftarrow i + 1$
end while
 $\underline{u}^* \leftarrow \underline{u}^i$

2.2 Caso unidimensionale: algoritmo di Newton e soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 2.

2.3 Caso bidimensionale: accenno di soluzione grafica

blablabla, vedi Figura 3a e Figura 3b.

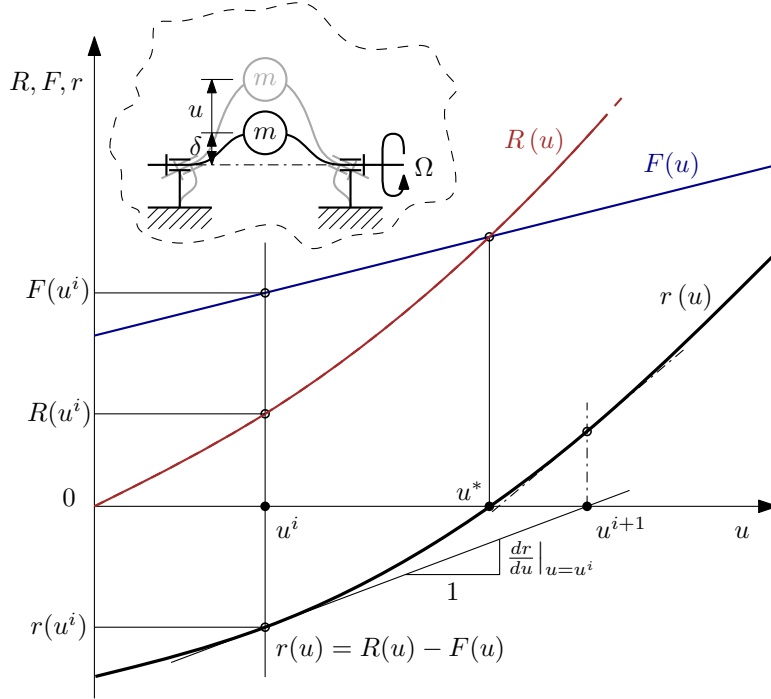


Figure 2: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=1

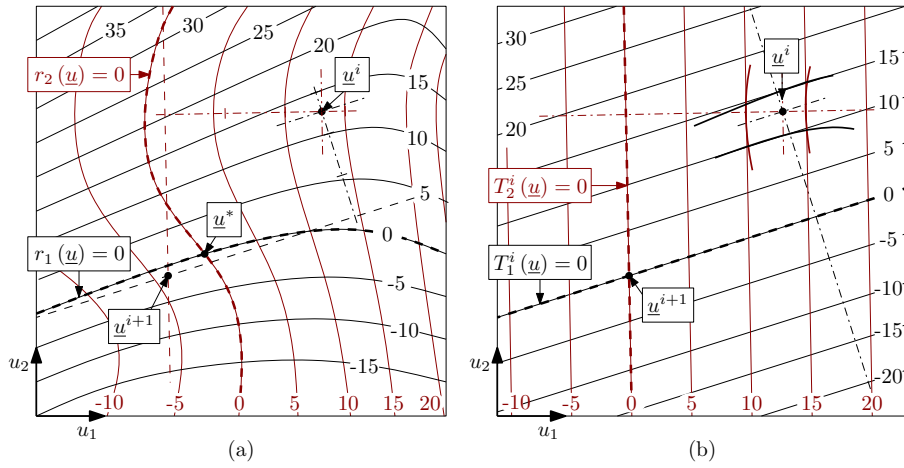


Figure 3: Costruzione grafica per l'iterato N-R, caso N=2