

TENSIONE IDEALE

1 Introduzione

Una indagine totalmente sperimentale sulla resistenza dei materiali sottoposti a sollecitazione composta dovrebbe prendere in esame gli effetti di tutte le possibili combinazioni delle tre tensioni principali σ_1 , σ_2 e σ_3 , valutando sperimentalmente se il materiale, quando viene sottoposto ad uno specifico stato tensionale definito dalle tre tensioni principali, resiste o collassa. Il problema si complica ulteriormente quando si considerano non solo tensioni statiche, ma anche affaticanti dato che, oltre a tutte le combinazioni delle tensioni principali, occorrerebbe anche esaminare le innumerevoli combinazioni dei vari cicli affaticanti di tali tensioni. Per esempio, una tensione principale potrebbe essere affaticante all'origine, una all'inversione, ed una statica. Si conclude che un approccio totalmente sperimentale in grado di giudicare la resistenza dei materiali soggetti a tensioni statiche od affaticanti non è di fatto adottabile, a causa del numero troppo elevato di prove sperimentali che questa procedura comporterebbe.

Si osserva inoltre che, relativamente alla resistenza degli acciai da costruzione, sono in genere disponibili scarsi dati ricavati da prove uniassiali statiche e, meno frequentemente, affaticanti. La più comune prova statica è la prova a trazione semplice, mentre la più frequente prova affaticante è quella a flessione rotante.

Questa impossibilità pratica di esaminare **sperimentalmente** lo stato triassiale nella sua complessità per decidere della resistenza statica od a fatica del materiale, ha di fatto reso necessario l'impiego di un approccio **teorico** semplificato. Si cerca cioè di individuare per via teorica uno stato monodimensionale che sia equivalente allo stato tridimensionale, tale cioè che i due stati tensionali, quello triassiale effettivo e quello monodimensionale equivalente, producano la stessa sofferenza del materiale. Per esempio, quando lo stato monoassiale causa snervamento, anche lo stato tensionale triassiale, se è davvero equivalente a quello monodimensionale, deve produrre lo snervamento del materiale. In altre parole, in questo caso la formula della tensione equivalente esprime quale combinazione delle tre tensioni principali causa snervamento del materiale.

Dalle osservazioni precedenti si deduce l'importanza del concetto di tensione equivalente: essa permette di ricondurre lo stato triassiale effettivo ad uno monodimensionale, molto più facilmente confrontabile con i dati sperimentali unidimensionali di resistenza dei materiali, mettendo quindi in

grado il progettista di prevedere se il componente meccanico resiste o collassa. Dato che lo stato monoassiale fondamentale è quello di trazione (o compressione) semplice, la formula della tensione equivalente può essere interpretata come un mezzo per ricondurre uno stato tensionale generico ad uno stato di trazione semplice. (Siccome i materiali metallici resistono meglio a compressione, per agire in favore della sicurezza è meglio interpretare lo stato monodimensionale come di trazione pura e non come di compressione semplice.) Più in generale, se si considerano non solo i carichi statici ma anche quelli affaticanti, le formule della tensione equivalente applicata a casi affaticanti permettono di trasformare uno stato triassiale affaticante in uno monoassiale affaticante.

Sfortunatamente i nostri livelli di conoscenza non ci permettono di sviluppare teoricamente formule della tensione equivalente talmente accurate che i due stati tensionali, quello triassiale effettivo e quello monodimensionale equivalente, producano effetti perfettamente uguali di danneggiamento del materiale per tutte le combinazioni statiche ed affaticanti delle tensioni principali. Una teoria esatta dovrebbe infatti essere in grado di fornire, per carichi statici, una eguaglianza di danneggiamento del materiale sia relativamente allo snervamento che alla rottura, mentre per carichi affaticanti la teoria dovrebbe essere ugualmente applicabile a cicli all'origine e all'inversione, ed addirittura in grado di prevedere correttamente una resistenza a tempo sia infinito che definito.

Da un punto di vista applicativo, il massimo risultato per ora conseguibile è una formula della tensione equivalente che garantisca che i due stati tensionali, quello triassiale effettivo e quello monodimensionale equivalente, producano uguali effetti nocivi relativamente ad aspetti facilmente quantificabili, correlati in qualche modo alla resistenza dei materiali. Per esempio, una tensione equivalente molto impiegata si fonda sull'assunzione che lo stato tensionale monoassiale e quello tridimensionale sono equivalenti quando le loro energie di distorsione sono uguali. (L'energia di distorsione è correlata alla deformazione deviatorica del cubetto infinitesimo, cioè alla parte distorsiva delle tensioni, mentre si assume che la deformazione volumetrica, associata alla parte idrostatica delle tensioni, non danneggi il materiale.) L'energia di distorsione è facilmente quantificabile, cioè esprimibile in funzione dello stato tensionale triassiale, e permette di esprimere formule di equivalenza tra stato monoassiale e tridimensionale, cioè consente, dato uno stato tensionale tridimensionale, di calcolare lo stato monodimensionale che possiede la stessa energia di distorsione dello stato triassiale. Secondo questa teoria della tensione equivalente, si assume che il materiale cede

quando l'energia di distorsione è troppo alta, adottando quindi l'energia di distorsione come il parametro correlato alla resistenza del materiale.

Tale ipotesi risulta abbastanza aderente alla realtà, ma non inappuntabile. Per esempio, per uno stato triassiale, l'energia di distorsione è esprimibile in funzione dei quadrati delle tensioni principali, e cioè rimane la stessa per un certo stato tensionale e per uno stato tensionale ricavato dal primo invertendo a volontà i segni delle tensioni principali. I dati sperimentali mostrano invece chiaramente che i materiali metallici meglio sopportano tensioni compressive, cioè negative, rispetto a quelle trattive. In conclusione, una tensione equivalente fondata su basi energetiche non riesce a differenziare tra uno stato tensionale trattivo ed uno compressivo, mentre i dati sperimentali mostrano che la resistenza a compressione è più alta della resistenza a trazione. In conclusione, una formula della tensione equivalente basata sul lavoro di distorsione non è in grado di individuare uno stato tensionale monodimensionale che danneggi il materiale esattamente come l'effettivo stato tensionale tridimensionale.

Si noti infatti che si parla di "tensione equivalente" e non di "tensione uguale", perché l'equivalenza, tra lo stato triassiale effettivo e lo stato monodimensionale equivalente, non è completa, ma limitata a particolari aspetti dello stato tensionale. Si noti inoltre che, nel mondo anglosassone, si usa il termine fin qui usato di "**tensione equivalente**", mentre in Italia si parla di "**tensione ideale**". Il termine anglosassone appare più espressivo. In questo testo si usano i due termini in modo intercambiabile, ma nella pratica ingegneristica sembra opportuno impiegare la terminologia italiana, cioè "tensione ideale", semplicemente perché è terminologia molto più diffusa.

La Figura 1.1 presenta un cubetto soggetto ad uno stato tensionale triassiale completo, ed il cubetto soggetto alla tensione equivalente. La

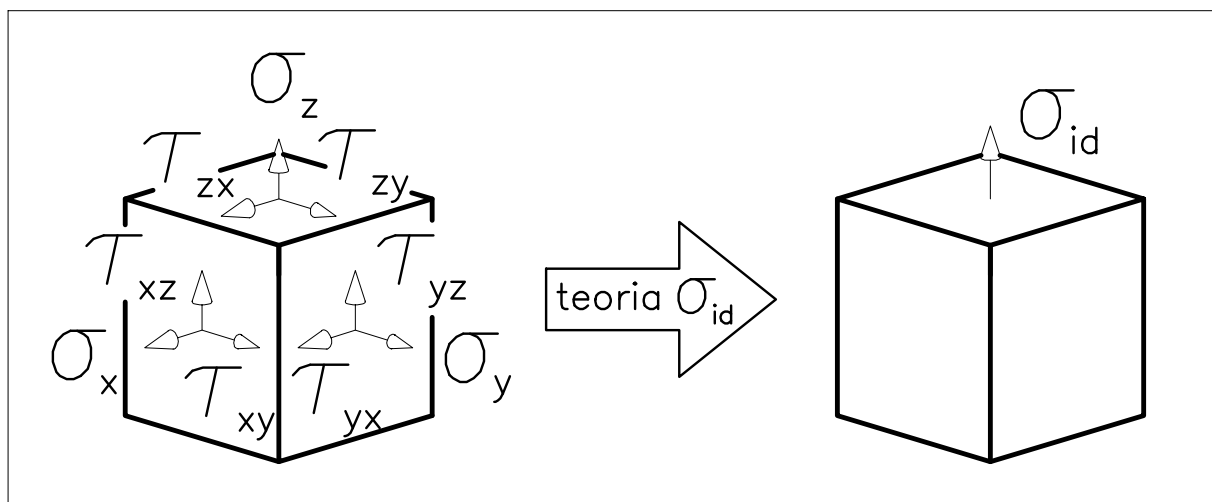
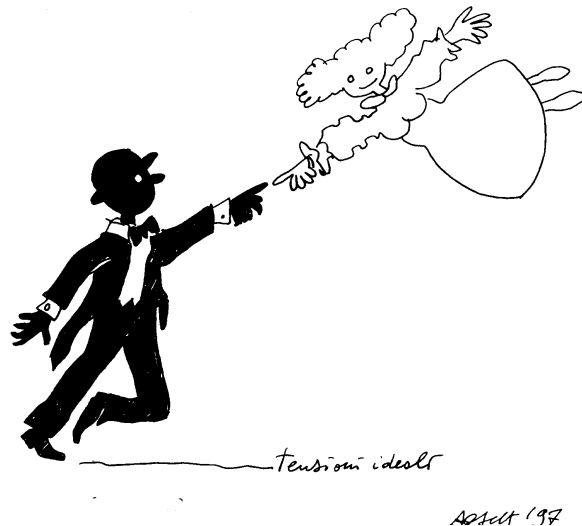


Figura 1.1
Error! Bookmark not defined.

sofferenza del materiale soggetto alle tensioni rappresentate nei due cubetti dovrebbe essere la stessa.

Il termine "equivalente" viene impiegato in questo testo anche in relazione agli elementi finiti (vedi il relativo Capitolo), dove si parla di "forze nodali equivalenti". Le tensioni esistenti all'interno di un elemento finito possono essere pensate come causate da forze applicate ai nodi, dette "forze nodali": Tali forze riassumono quindi lo stato tensionale all'interno di un elemento finito, ed in questo senso la loro presenza equivale alla presenza delle tensioni nell'elemento. Queste forze vengono perciò chiamate "forze nodali equivalenti". Il loro valore viene calcolato su basi energetiche, ponendo quindi una equivalenza tra forze nodali e stato tensionale interno all'elemento basata sull'energia. Il paragone con la tensione equivalente secondo il lavoro di distorsione risulta adesso stringente.



Tensioni ideali

2 Teorie del collasso

Si considerano nel seguito le principali formulazioni della tensione ideale che sono state proposte. Alcune di queste teorie si sono rivelate inesatte, e sono quindi state abbandonate nella pratica ingegneristica. Vengono comunque qui riportate perché conservano un certo significato storico. In ogni caso, il fatto che sono sopravvissute diverse teorie della tensione ideale è un segno della incertezza che permane nella definizione della equivalenza tensionale.

Alcune teorie sono adatte ai soli materiali fragili, mentre altre sono applicabili soltanto a materiali duttili. È anche opportuno distinguere tra tensioni ideali per carichi statici e tensioni ideali per carichi affaticanti. Le tensioni ideali per carichi statici vengono presentate per prime, dato che sono già state trattate nel corso di Scienza delle Costruzioni, e costituiscono quindi un richiamo.

2.1 Teorie del collasso per carichi statici

Le teorie fondamentali del collasso per carichi statici sono :

- 1) Teoria della massima tensione principale;
- 2) Teoria della massima deformazione;
- 3) Teoria della massima tensione tangenziale;
- 4) Teoria della massima energia di deformazione;
- 5) Teoria della massima energia di distorsione.

Nel seguito si affrontano queste cinque teorie separatamente, per il momento relativamente al solo caricamento statico. Per ogni teoria, si discute dapprima l'aspetto teorico di equivalenza tra stato tensionale triassiale e monodimensionale, e si deducono poi le formule operative della tensione ideale per situazioni tensionali o assai comuni, o assai generiche. Si elaborano separatamente formule per : (A) stati tensionali piani (più esattamente, si intendono "di tensione piana") ; (B) stati tensionali tridimensionali. Relativamente agli stati tensionali piani, si sviluppano formule per (A1) la situazione più semplice da trattare analiticamente di stato piano (più esattamente, si intende "di tensione piana") riferito alle direzioni principali, caratterizzato cioè dalla presenza di σ_1 e di σ_2 , mentre la tensione σ_3 viene supposta nulla perché lo stato è assunto di tensione piana. Si sviluppano inoltre formule per (A2) la situazione comunemente incontrata di stato piano (si intende "di tensione piana") incompleto,

caratterizzato cioè dalla presenza di σ_x e di σ_{xy} (mentre la tensione σ_y viene supposta nulla in uno stato piano incompleto e inoltre, avendo supposto uno stato piano di tensione, anche σ_z, σ_{xz} e σ_{yz} vengono assunte nulle). Tale stato tensionale viene per esempio incontrato in un albero di trasmissione soggetto contemporaneamente a flessione ed a torsione. Si sviluppano poi formule per (A3) uno stato piano completo, caratterizzato cioè dalla presenza di σ_x, σ_y e di σ_{xy} (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z, σ_{xz} e σ_{yz} sono nulle). Infine, si sviluppano inoltre formule per (B1) uno stato tridimensionale completo, quest'ultimo in genere espresso per semplicità in funzione delle tre tensioni principali, e raramente rispetto ad una terna non principale, che richiede formule di tensione ideale più complesse. Se si incontra un caso tensionale triassiale di cui si conoscono le sei componenti tensionali indipendenti $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$, stato tensionale espresso cioè rispetto a tre direzioni non principali, occorrerà dapprima calcolare le tre tensioni principali, e poi impiegare le formule della tensione ideale espresse in funzione delle tensioni principali. La Figura 2.1.1 riporta i quadrati e cubetti elementari, sollecitati dalle relative tensioni, per i casi (A1), (A2), (A3), e (B1).

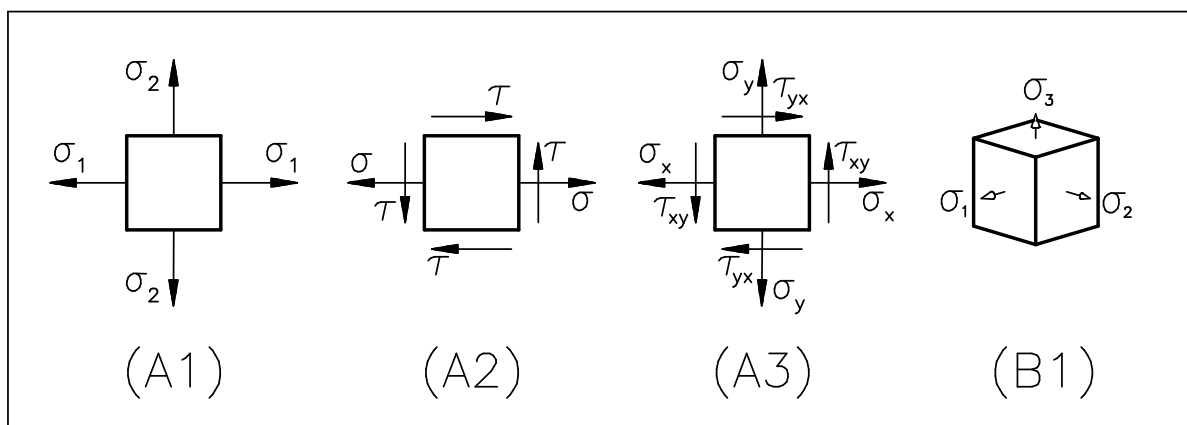


Figura 2.1.1

Infine, per ogni teoria della tensione ideale, si effettuano due semplici controlli sulla bontà delle formulazioni. Il primo controllo è relativo al fatto che ogni teoria di tensione ideale contiene al suo interno il valore del rapporto teorico tra tensione critica a e tensione critica a , rapporto che verrà evidenziato per ogni teoria della tensione ideale. Tale rapporto teorico si può interpretare come il rapporto tra la criticità a trazione semplice (la tensione) e la criticità a torsione (la tensione). (Il rapporto teorico potrebbe anche essere interpretato come rapporto tra flessione semplice (la tensione) e taglio (la tensione), ma flessione e sforzo normale producono valori sperimentali di resistenza abbastanza

simili, mentre il taglio genera normalmente tensioni meno rilevanti della torsione, e quindi è meno interessante.)

Si consideri un acciaio C40 . La tensione di criticità per carichi statici è la tensione di snervamento. Per trazione-flessione, la tensione di snervamento vale 360 - 430 MPa , mentre per torsione la di snervamento vale 220 MPa . I dati sperimentali per questo acciaio da bonifica dimostrano che **la tensione critica a vale quasi esattamente il doppio della tensione critica a** . Questo rapporto è sostanzialmente valido per tutti gli acciai da costruzione. Se quindi il legame teorico tra la tensione critica a e quella a , implicito nella formulazione della tensione ideale considerata, si distanzia troppo dal valore sperimentalmente misurato di 2 , la formulazione della tensione ideale considerata non è applicabile agli

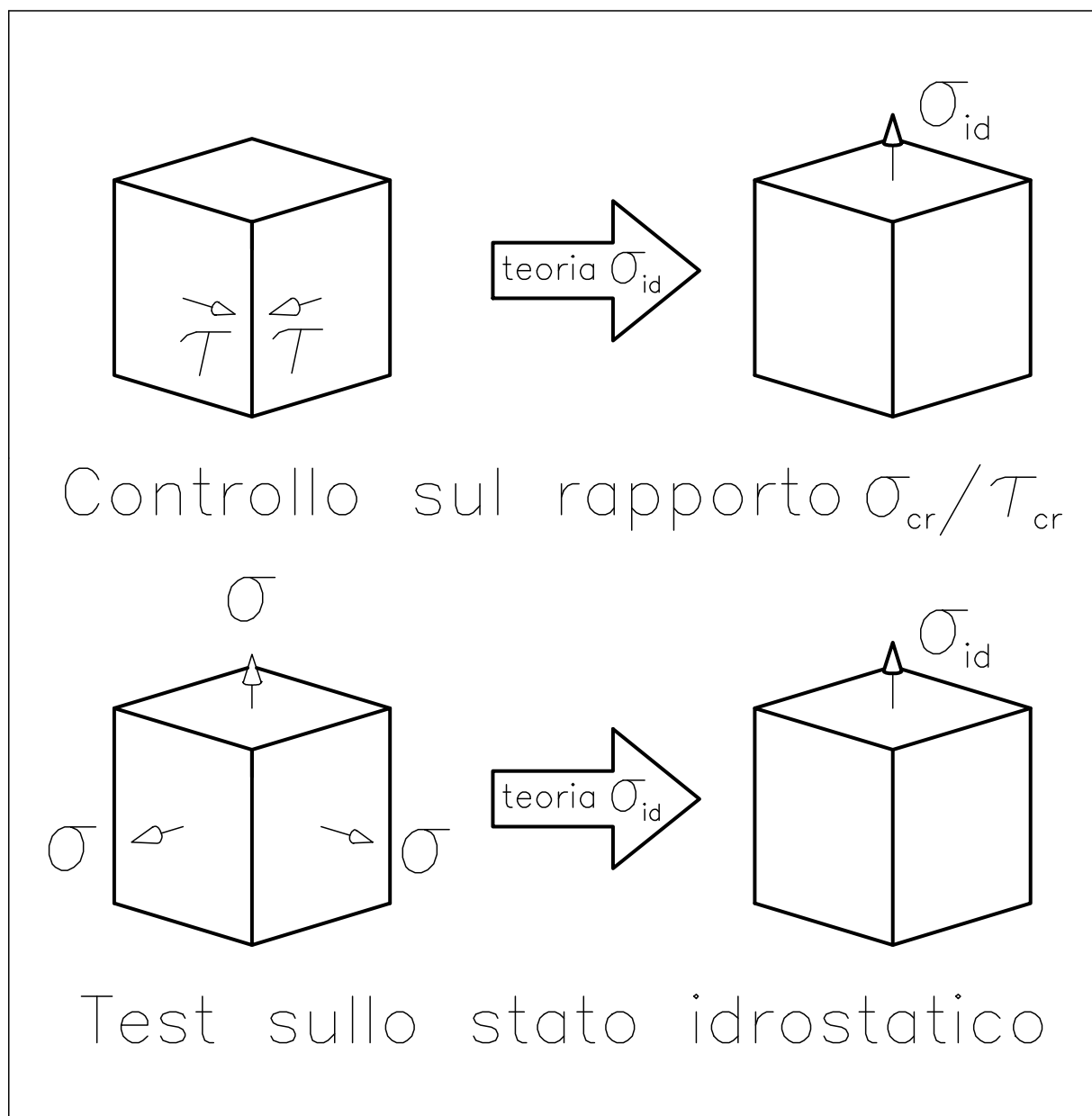


Figura 2.1.2

Error! Bookmark not defined.

acciai.

Il secondo controllo riguarda il fatto sperimentale che i materiali in genere, ed in particolare gli acciai, non sono danneggiati da uno stato tensionale idrostatico puro. Una sfera di acciaio buttata nella fossa delle Marianne non dovrebbe essere danneggiata dalla pressione del mare, che genera nella sfera una tensione idrostatica pura. (Un corpo di forma qualunque, purché senza cavità, oppure con cavità pressurizzata, caricato da una pressione, genera in ogni suo punto una tensione idrostatica pura, per cui non è necessario che la forma sia sferica.) Mentre è relativamente semplice applicare ad un provino uno stato tensionale idrostatico **compressivo**, è sostanzialmente impossibile realizzare al suo interno uno stato idrostatico **trattivo**. Bisognerebbe infatti pensare ad una sfera di materiale, dalla cui superficie partono radialmente una serie di fili, posti in trazione. Sperimentalmente però i fili si spezzerebbero prima che la tensione idrostatica trattiva raggiunga un valore significativo. D'altro canto, il fatto che sia così difficile imporre in laboratorio una tensione idrostatica trattiva di valore significativo implica che tale stato tensionale di fatto non si incontra in organi meccanici reali.

La Figura 2.1.2 illustra gli stati tensionali relativi ai due controlli sopra menzionati.

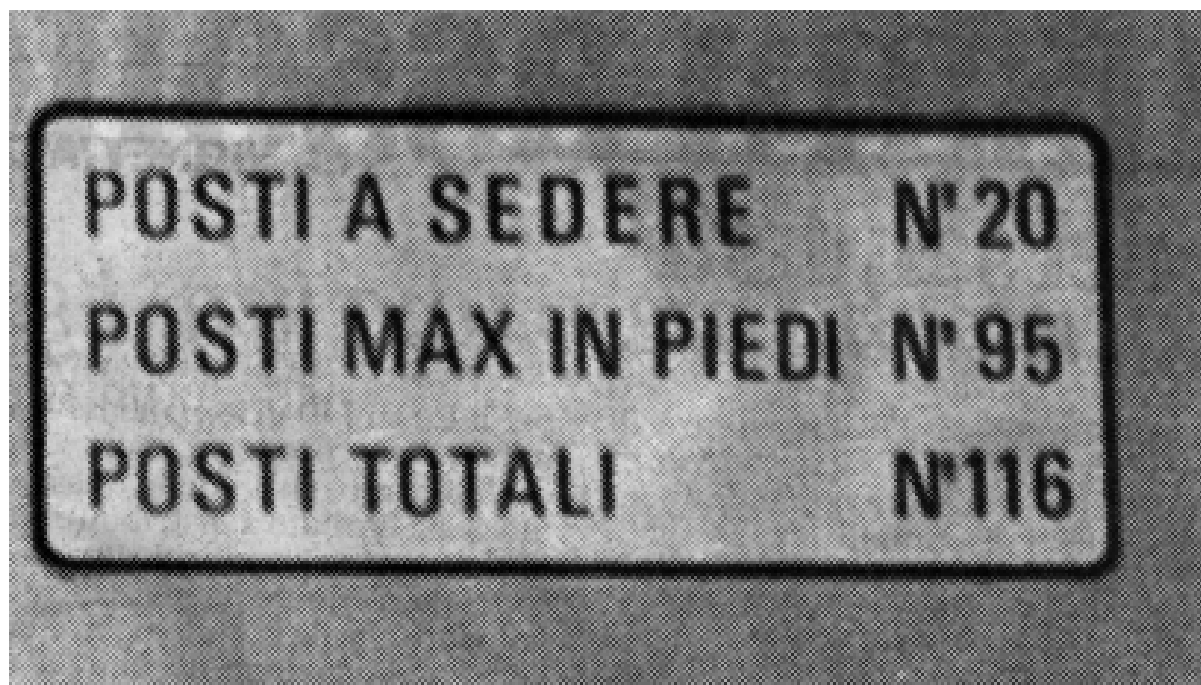
Ad illustrazione dei problemi connessi alla resistenza a trazione idrostatica trattiva e compressiva, si riporta il seguente passo estratto da un autorevole testo di Costruzione di Macchine :

Tests at high pressure have been performed in the laboratory as well; the Nobel Prize winner P.W. Bridgman at Harvard University has made pressures as large as 1000000 lb/sq in. and has found that weak materials such as ice (forzen water) did not crack under that stress. An experiment with three-dimensional tension is much more difficult than with compression, but it has been performed once, by the Russian scientist Joffe. He took a solid glass sphere (a marble) and cooled it off slowly and gradually to the temperatura of liquid air. In that state the marble presumably was without stress. Then the marble was taken out of the liquid-air bottle, exposed to room temperature, and carefully watched. The outside layers of the marble would warm up while the center was still cold. The thermal expansion of the outer layers was prevented by the cold inside, thus putting the center of the sphere in hydrostatic tension. Although this tension could not be measured directly, it could be calculated by the theories of heat conduction and we have sufficient faith that such calculations are not too far from the truth. The calculation showed hydrostatic tension at the center of the sphere far greater than the

ordinary, one-dimensional tensile strength of glass, but the center of the marble remained clear and did not crack or tear.

Il secondo controllo sulle formule della tensione equivalente viene eseguito calcolando la tensione ideale per uno stato idrostatico, trattivo o compressivo. Ammettendo, come appare plausibile anche sulla base del passo sopra riportato, che una tensione idrostatica, sia trattiva che compressiva, non danneggi il materiale, la tensione ideale per uno stato idrostatico deve valere zero, ad esprimere l'assenza di danneggiamento del materiale. Se quindi il rapporto tra la tensione ideale per uno stato tensionale idrostatico ed il valore della tensione idrostatica non è o nullo o comunque molto piccolo, la formulazione della tensione ideale considerata non è corretta, almeno in vicinanza di uno stato tensionale idrostatico..

Se invece la formulazione di tensione ideale passa questi due controlli, ciò non significa necessariamente che la formulazione sia ottima, anche se il soddisfacimento dei due test costituisce un argomento a favore della sua applicabilità. In altre parole questi controlli vanno intesi come condizioni necessarie ma non sufficienti per la validità delle formulazioni.



Qualche volta i conti non tornano

Error! Bookmark not defined.

2.1.1 Teoria della massima tensione principale

(della σ massima , della σ_{\max} , di Rankine , di Galileo , di Lamè)

Secondo questa teoria, uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il massimo modulo della tensione normale eguaglia la tensione di trazione del caso monodimensionale. Siccome le tensioni principali possiedono proprietà estremali, il massimo in modulo della tensione normale si raggiunge per una delle tre tensioni principali. Di conseguenza, una riformulazione della teoria della massima tensione principale è la seguente: uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il più grande modulo delle tre tensioni principali del caso triassiale eguaglia la tensione di trazione del caso monodimensionale. In altre parole, la tensione ideale è il massimo modulo delle tre tensioni principali del caso triassiale.

In uno stato tensionale piano riferito alle tensioni principali σ_1 e σ_2 , caso (A1) di Figura 2.1.1 , la tensione ideale è quindi il valore massimo tra :

$$|\sigma_1| , |\sigma_2| \quad (2.1.1.1)$$

In uno stato tensionale piano incompleto, caso (A2) di Figura 2.1.1 , caratterizzato dalla presenza di σ_x e di τ_{xy} , le due tensioni principali σ_1 , σ_2 nel piano delle tensioni valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (2.1.1.2)$$

dove σ denota la sola tensione normale presente, cioè σ_x , e τ indica τ_{xy} . La tensione ideale è il massimo tra i due valori assunti dalla (2.1.1.2) .

Più genericamente, per lo stato tensionale piano completo, caso (A3) di Figura 2.1.1 , individuato dalla presenza di σ_x , di σ_y , e di τ_{xy} , (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z , τ_{xz} , e τ_{yz} sono nulle) , le due tensioni principali nel piano delle tensioni (la terza tensione principale è nulla, dato che lo stato è piano di tensione) valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.1.3)$$

Infine, per uno stato tensionale tridimensionale completo riferito per semplicità alle direzioni principali, caso (B1) di Figura 2.1.1 , individuato dalle tensioni principali σ_1 , σ_2 , e σ_3 , la tensione ideale è il valore massimo tra :

$$|\sigma_1| , |\sigma_2| , |\sigma_3| \quad (2.1.1.4)$$

Si esaminano ora i due controlli esposti nel Paragrafo 2.1 , il primo sul rapporto, implicito nella teoria, tra tensione critica σ_{cr} ed σ_{id} , ed il secondo controllo sul valore della tensione ideale in presenza di uno stato tensionale idrostatico.

Se si calcola la tensione ideale per un caso di taglio puro, Figura 2.1.2 , si deduce, per esempio dalla (2.1.1.2) ponendo nulla :

$$\sigma_{id} = |\tau| \quad (2.1.1.5)$$

Quando la tensione σ_{id} raggiunge un valore che provoca lo snervamento a σ_{cr} del materiale, quando cioè si raggiunge la criticità a σ_{cr} , la tensione ideale, se producesse lo stesso grado di sofferenza del materiale, dovrebbe causare lo snervamento a σ_{cr} del materiale. (Snervamento a σ_{cr} perché la tensione ideale è rappresentativa di una trazione semplice). In altre parole, se il primo membro della (2.1.1.5), cioè la σ_{id} ideale, raggiunge la criticità, anche il secondo membro della (2.1.1.5), cioè τ , deve raggiungere la criticità :

$$\sigma_{id} = \sigma_{cr} = |\tau_{cr}| \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = 1 \quad (2.1.1.6)$$

Quindi la teoria della massima tensione principale contiene al suo interno un rapporto teorico di 1 tra la tensione critica σ_{cr} e quella a σ_{id} , rapporto che troppo si discosta dal valore 2 misurato sperimentalmente per gli acciai in relazione allo snervamento a σ_{cr} ed a σ_{id} . Si conclude che la teoria della massima tensione principale non è applicabile agli acciai.

Il secondo controllo riguarda uno stato idrostatico, con le tre tensioni principali uguali tra loro, Figura 2.1.2 . Dalla (2.1.1.4) la tensione ideale vale σ_{id} , cioè il rapporto tra la tensione ideale e la tensione idrostatica (in modulo) vale 1 , e quindi la tensione ideale non è trascurabile rispetto a σ_{id} . Di conseguenza, la teoria della massima tensione principale non passa neanche il test sulla tensione idrostatica che richiede che, in presenza di uno stato tensionale idrostatico, il valore della tensione ideale risulti molto basso rispetto alla tensione idrostatica. Si conclude che la teoria della

massima tensione principale non è applicabile agli acciai. Invece, tale teoria è ritenuta applicabile a materiali molto fragili, quali le ceramiche per impieghi biomedici ed i vetri, almeno in una formulazione variata rispetto alla teoria della massima tensione principale, esposta nel seguito.

Secondo questa variazione della teoria della massima tensione principale, la tensione ideale è la massima tensione principale di trazione, e non più il massimo modulo delle tensioni principali. Infatti, dato che i materiali in genere meglio sopportano le tensioni compressive mentre mal sopportano quelle trattive, qualora delle tre tensioni principali alcune siano trattive ed altre compressive, le tensioni principali trattive risultano molto più pericolose di quelle compressive, che quindi vengono trascurate in questa variazione della teoria della massima tensione principale.

Convien quindi in questa variazione della teoria della massima tensione principale riferirsi alle direzioni principali, ed assumere come tensione ideale la massima tensione principale **di trazione**. Se le tre tensioni principali sono tutte compressive, la tensione ideale è nulla. Come già accennato, questa formulazione è quella comunemente adottata per materiali ceramici per impiego biomedico, materiali usati per esempio nelle protesi d'anca per la fabbricazione delle testine in ceramica sostitutive della testa del femore.

Apparentemente sin dalla più remota antichità ci si rese conto che esiste un rapporto costante fra la lunghezza del raggio di un cerchio e quella della sua circonferenza, rapporto che venne indicato con π non prima del XVIII secolo.

I numeri nella storia dell'umanità
Stefano Breccia

2.1.2 Teoria della massima deformazione (della epsilon massima, della ϵ_{max})

Si premette che la teoria della massima deformazione non viene impiegata nella pratica ingegneristica. Tuttavia la si presenta in questo testo per ragioni storiche e per completezza.

Secondo questa teoria, uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il massimo modulo della deformazione eguaglia la deformazione di trazione del caso monodimensionale. Siccome le deformazioni principali possiedono proprietà estremali, il massimo in modulo della deformazione si raggiunge per una delle tre deformazioni principali. Di conseguenza, una riformulazione della teoria della massima deformazione è la seguente: uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il più grande modulo delle tre deformazioni principali del caso triassiale eguaglia la deformazione di trazione del caso monodimensionale.

Con questa formulazione si individua quindi una deformazione ideale, quella del caso monodimensionale equivalente. Siccome però i dati sulla resistenza dei materiali sono raccolti in termini di σ e non di ϵ , è conveniente riesprimere la deformazione ideale in termini di tensione ideale. Per esempio, in uno stato tensionale piano riferito alle tensioni principali σ_1 e σ_2 , caso (A1) di Figura 2.1.1, la deformazione ideale è il valore massimo tra :

$$|\epsilon_1|, |\epsilon_2|, |\epsilon_3| \quad (2.1.2.1)$$

Si noti che, anche se lo stato è di tensione piana, e quindi una tensione principale, diciamo la σ_3 , è nulla, la corrispondente deformazione principale ϵ_3 è generalmente non nulla. Occorre quindi, anche per uno stato piano di tensione, considerare potenzialmente le tre deformazioni principali. Applicando la legge di Hooke, e quindi confinando la teoria della massima deformazione al campo elastico lineare, le tre deformazioni principali per uno stato di tensione piana possono venire espresse in funzione delle tre tensioni principali :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \nu \frac{\sigma_2}{E} \quad ; \quad \epsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \nu \frac{\sigma_1}{E} \quad ; \quad \epsilon_3 = -\frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.1.2.2)$$

Si può però dimostrare che, per qualunque combinazione di ν_1 e ν_2 , ν_3 è minore od eguale al massimo tra ν_1 ed ν_2 , purché $\nu_1 < 1/3$. Questo punto è trattato nel Paragrafo 2.1.2.1. Di conseguenza, la deformazione ideale è ϵ_1 oppure ϵ_2 , ma non ϵ_3 , almeno per gli acciai per i quali $0.3 < \nu < 1/3$. (Per gli elastomeri, che sono virtualmente incomprimibili, $0.5 > 1/3$.)

Si riprende la procedura che permette di esprimere la tensione ideale a partire dalla deformazione ideale. La tensione ideale descrive uno stato monodimensionale, per cui il legame tra tensione e deformazione ideale è :

$$\epsilon_{id} = \frac{\sigma_{id}}{E} \quad (2.1.2.3)$$

per cui la tensione ideale secondo la teoria della massima deformazione si ricava nel modo seguente :

$$\epsilon_{id} = \max \left[|\epsilon_1| = \frac{1}{E} |\sigma_1 - \nu \sigma_2| \quad ; \quad |\epsilon_2| = \frac{1}{E} |\sigma_2 - \nu \sigma_1| \right] \Rightarrow \quad (2.1.2.4)$$

$$\sigma_{id} = E \epsilon_{id} = \max [|\sigma_1 - \nu \sigma_2| \quad ; \quad |\sigma_2 - \nu \sigma_1|]$$

Si considera ora uno stato tensionale piano incompleto, caso (A2) di Figura 2.1.1, caratterizzato dalla presenza di σ_x e di τ_{xy} . Le due tensioni principali σ_1, σ_2 nel piano delle tensioni valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (2.1.2.5)$$

dove σ denota la sola tensione normale presente, cioè σ_x , e τ indica τ_{xy} . Seguendo la (2.1.2.4), la tensione ideale vale :

$$\sigma_{id} = \max [|\sigma_1 - \nu \sigma_2| \quad ; \quad |\sigma_2 - \nu \sigma_1|] = \max \left| \frac{1-\nu}{2} \sigma \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right| \quad (2.1.2.6)$$

Più genericamente, per lo stato tensionale piano completo, caso (A3) di Figura 2.1.1, individuato dalla presenza di σ_x, σ_y e di τ_{xy} (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z, τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle), le due tensioni principali nel piano delle tensioni (la terza tensione principale è nulla, dato che lo stato è piano di tensione) valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.2.7)$$

Seguendo la (2.1.2.4) , la tensione ideale vale :

$$\sigma_{id} = \max \left[|\sigma_1 - \nu \sigma_2| ; |\sigma_2 - \nu \sigma_1| \right] = \max \left| \frac{1-\nu}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right| \quad (2.1.2.8)$$

Infine, per uno stato tensionale tridimensionale completo riferito per semplicità alle direzioni principali, caso (B1) di Figura 2.1.1 , individuato dalle tensioni principali σ_1 , σ_2 , e σ_3 , la tensione ideale è il valore massimo tra :

$$\sigma_{id} = \max \left[|\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)| ; |\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)| ; |\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)| \right] \quad (2.1.2.9)$$

Si esaminano ora i due controlli esposti nel Paragrafo 2.1 , sul rapporto, implicito nella teoria, tra tensione critica σ_{cr} ed σ_{id} , e sul valore della tensione ideale in presenza di uno stato tensionale idrostatico. Se si calcola la tensione ideale per un caso di taglio puro, Figura 2.1.2 , si deduce, per esempio dalla (2.1.2.6) ponendo $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$:

$$\sigma_{id} = (1 + \nu) |\tau| \quad (2.1.2.10)$$

Quando la tensione σ raggiunge un valore che provoca lo snervamento a σ_{cr} del materiale, quando cioè si raggiunge la criticità a σ_{cr} , la tensione ideale, se producesse lo stesso grado di criticità del materiale, dovrebbe causare lo snervamento a σ_{cr} del materiale. In altre parole, se il primo membro della (2.1.2.10), cioè la σ_{id} ideale, raggiunge la criticità, anche il secondo membro della (2.1.2.10), cioè $(1 + \nu) |\tau|$, deve raggiungere la criticità :

$$\sigma_{id} = \sigma_{cr} = (1 + \nu) |\tau_{cr}| \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = 1 + \nu \approx 1.3 \quad (2.1.2.11)$$

Quindi la teoria della massima deformazione contiene al suo interno un rapporto teorico per gli acciai ($\nu = 0.3$) di 1.3 tra la tensione critica σ_c e quella σ_{id} , rapporto che troppo si discosta dal valore 2 misurato sperimentalmente per gli acciai in relazione allo snervamento σ_s ed σ_{sc} . Si conclude che tale teoria non è applicabile agli acciai.

Il secondo controllo riguarda uno stato idrostatico, con le tre tensioni principali uguali tra loro, Figura 2.1.2. Dalla (2.1.2.9) la tensione ideale vale per gli acciai $(1 - 2\nu) \sigma_{id} = 0.4 \sigma_{sc}$, e quindi il rapporto tra tensione ideale e tensione idrostatica vale 0.4, un valore abbastanza basso. Di conseguenza, la teoria della massima deformazione passa il test sulla tensione idrostatica che richiede che, in presenza di uno stato tensionale idrostatico, il valore della tensione ideale risulti molto basso rispetto alla tensione idrostatica. (Si noti che per materiali elastomerici, che sono virtualmente incomprimibili, $\nu = 0.5$, per cui la tensione ideale per il caso idrostatico diventa nulla, come richiesto.) Siccome comunque la teoria della massima deformazione non passa il primo controllo in relazione agli acciai, si conclude che tale teoria non è applicabile agli acciai.

2.1.2.1 La terza deformazione principale

Si è già accennato, in relazione alla formula (2.1.2.2) al fatto che, in stato di tensione piana ($\sigma_3 = 0$), per qualunque combinazione di σ_1 e di σ_2 , σ_3 è minore od eguale al massimo tra σ_1 ed σ_2 , purché $\sigma_1/\sigma_2 \geq 1/3$. Si intende dimostrare nel seguito questo punto.

Innanzitutto si osserva che ci si può sempre ricondurre, attribuendo opportunamente gli indici alle due tensioni principali σ_1 e σ_2 ed eventualmente invertendo contemporaneamente il loro segno, alla situazione caratterizzata da $\sigma_1 \geq 0$ e da $-\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Infatti, se σ_1 e σ_2 sono positive, basta attribuire l'indice 1 alla tensione maggiore tra σ_1 e σ_2 , per cui vengono rispettate le condizioni $\sigma_1 \geq 0$ e $-\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Se σ_1 e σ_2 sono entrambe negative, si nota che σ_1 , σ_2 e σ_3 non cambiano se si invertono contemporaneamente i segni di σ_1 e σ_2 . Basta quindi invertire entrambi i segni di σ_1 e σ_2 , che diventano quindi entrambe positive, ricadendo così nel caso precedente, ed attribuendo quindi l'indice 1 alla tensione maggiore. Infine, se σ_1 e σ_2 hanno segni opposti, si assume che $\sigma_1 \geq 0$ e $\sigma_2 \leq 0$, se no si scambiano gli indici 1 e 2. Se $\sigma_1 \geq -\sigma_2$, vengono rispettate le condizioni $\sigma_1 \geq 0$ e $-\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$. Se infine $\sigma_1 < -\sigma_2$, occorre scambiare insieme i segni e gli indici di σ_1 e di σ_2 , ricadendo nell'ultimo caso. Si può quindi concludere che le due assunzioni $\sigma_1 \geq 0$ e $-\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ non sono restrittive.

In seguito alle precedenti assunzioni, si ricava dalla prima delle (2.1.2.4) che σ_1 prevale su σ_2 , cioè che σ_2 non può essere la deformazione ideale. Inoltre dalla prima delle (2.1.2.2) si deduce anche che ϵ_1 è sempre positivo o nullo, e similmente dalla terza delle (2.1.2.2) che ϵ_3 è sempre negativo o nullo. Di conseguenza :

$$\epsilon_{id} = \max \left[|\epsilon_1| = \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad ; \quad |\epsilon_3| = -\epsilon_3 = \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \quad (2.1.2.1.1)$$

Perché quindi σ_1 prevalga su σ_3 , occorre che :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) &\geq |\epsilon_3| = \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2) \Rightarrow \\ \sigma_1 - \nu \sigma_2 &\geq \nu \sigma_1 + \nu \sigma_2 \Rightarrow (1 - \nu) \sigma_1 \geq 2 \nu \sigma_2 \Rightarrow \quad (2.1.2.1.2) \\ \sigma_1 &\geq \frac{2 \nu}{1 - \nu} \sigma_2 \end{aligned}$$

Se per esempio $\nu = 0.5$ (caso degli elastomeri), perché σ_1 prevalga su σ_3 , occorre che :

$$\sigma_1 \geq \frac{2 \times 0.5}{1 - 0.5} \sigma_2 = 2 \sigma_2 \quad (2.1.2.1.3)$$

e questa condizione è più restrittiva della parte delle assunzioni $\sigma_2 \leq \sigma_1$, e cioè non è implicita nelle assunzioni, e quindi non è detto che sia verificata. Di conseguenza, per $\nu = 0.5$ vi potranno essere certi valori di σ_1 e di σ_2 per i quali σ_3 prevale indesideratamente su σ_1 . Per esempio, per $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, e $\nu = 0.5$, si ha :

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (1 - \nu \times 1) = \frac{(1 - \nu)}{E} = \frac{0.5}{E} \quad ; \quad |\epsilon_3| = \frac{\nu}{E} (1 + 1) = \frac{2 \nu}{E} = \frac{1}{E} \quad (2.1.2.1.4)$$

e quindi σ_3 prevale su σ_1 .

Perché quindi σ_1 prevalga su σ_3 , occorre dall'ultima delle (2.1.2.1.2) che :

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq 1 \quad (2.1.2.1.5)$$

in modo che l'ultima condizione delle (2.1.2.1.2) risulti implicita nelle assunzioni, in particolare risulti implicita nella disequaglianza $\sigma_2 \leq \sigma_1$. Si ricava infine il valore limite di ν per cui la (2.1.2.1.5) è soddisfatta :

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq 1 \Rightarrow 2\nu \leq 1-\nu \Rightarrow 3\nu \leq 1 \Rightarrow \nu \leq \frac{1}{3} \approx 0.33 \quad (2.1.2.1.6)$$

come si voleva dimostrare.

Una alternativa a questa dimostrazione teorica consiste nel verificare numericamente, tramite un programma al calcolatore che spazzoli un campo esteso di combinazioni di tensioni σ_1, σ_2 , che σ_3 è minore del massimo tra σ_1 ed σ_2 se $\nu < 1/3$.

2.1.3 Teoria della massima tensione tangenziale (della tau massima, della τ_{\max} , di Guest, di Tresca, di Mohr)

Secondo questa teoria, uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il massimo modulo della tensione tangenziale del caso tridimensionale eguaglia il modulo della massima tensione tangenziale del caso monodimensionale di trazione.

Si dimostra che le massime tensioni tangenziali si incontrano non per una orientazione generica del cubetto, ma per orientazioni strettamente connesse alle direzioni principali. Per individuare tali direzioni di massima tensione tangenziale, si orienta dapprima il cubetto secondo le direzioni principali, cioè con le normali alle facce dirette secondo le tre direzioni principali. Si effettuano poi tre rotazioni, sempre a partire dalla orientazione secondo le direzioni principali. Si ruota dapprima il cubetto attorno ad un asse coincidente con la tensione principale 3, di 45° in senso orario od antiorario. Nascono sulle facce del cubetto non perpendicolari a 3 delle tensioni tangenziali titolate ad essere le massime possibili. Per la seconda rotazione, si riparte dal cubetto orientato secondo le direzioni principali, e si assume come asse di rotazione quello orientato come 2. Si ruota ancora di 45° , e si trova un secondo valore della tensione tangenziale titolato ad essere il massimo. Per la terza prova si ripete la procedura, assumendo come asse di rotazione quello orientato come 1. La tensione tangenziale massima è il massimo di questi tre valori.

Le procedure precedenti sono propriamente descritte tramite il

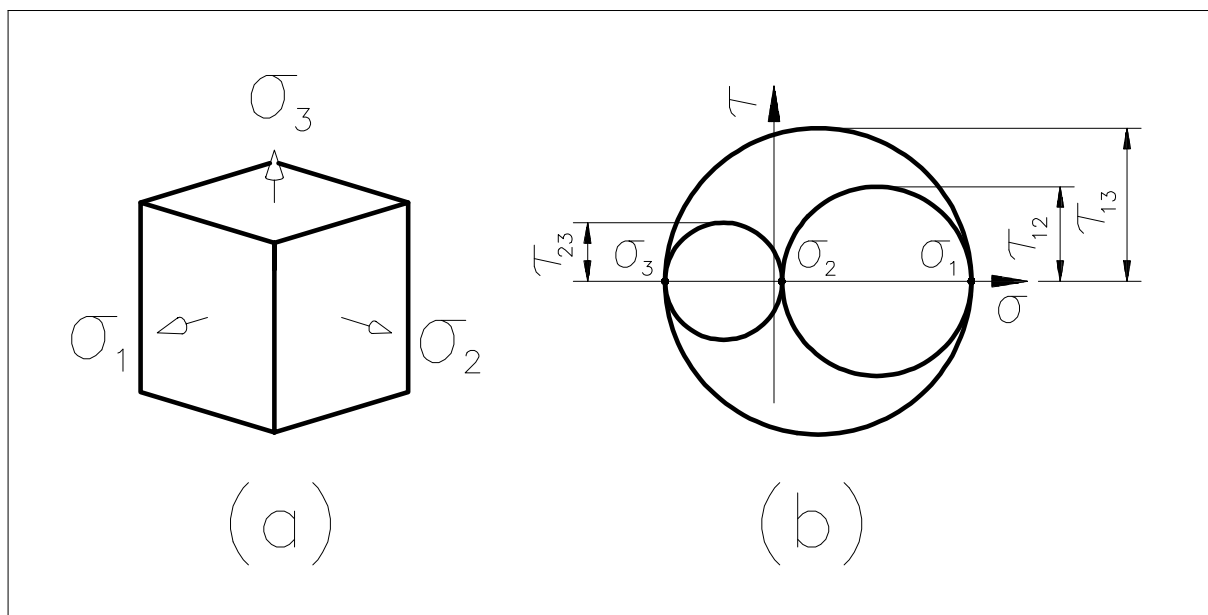


Figura 2.1.3.1

circolo di Mohr. In Figura 2.1.3.1 (a) si presenta il cubetto elementare orientato secondo le direzioni principali, ed in (b) si tracciano i tre cerchi di Mohr, che rappresentano appunto come le tensioni cambiano quando il cubetto ruota attorno ad un asse coincidente con una delle tre direzioni principali. Con τ_{12} si indica la massima tensione tangenziale che si incontra ruotando il cubetto attorno alla direzione principale 3, e con τ_{23} e con τ_{13} si indicano le massime tensioni tangenziali incontrate ruotando il cubetto rispettivamente attorno alle direzioni principali 1 e 2. La tensione tangenziale massima è il massimo di questi tre valori.

Per ognuno dei tre assi di rotazione, l'orientazione del cubetto che produce la massima tensione tangenziale relativamente a quella rotazione si ottiene ruotando sul circolo di Mohr di 90° in senso orario od antiorario, il che corrisponde ad una rotazione di 45° nel cubetto elementare. Inoltre si deriva graficamente dalla Figura 2.1.3.1 (b) che i valori delle tre tensioni tangenziali τ_{12} , τ_{23} , τ_{13} sono la metà dei diametri dei tre cerchi di Mohr, che a loro volta sono semplicemente le differenze delle tensioni principali $\sigma_1 - \sigma_2$, $\sigma_2 - \sigma_3$, $\sigma_3 - \sigma_1$.

Si considera adesso lo stato monodimensionale trattivo che si vuole equivalente a quello tridimensionale. I due stati tensionali sono ritenuti equivalenti se la tensione tangenziale massima è la stessa nei due casi. Lo stato monodimensionale trattivo è definito dalla tensione che è principale, Figura 2.1.3.2 (a), mentre le altre due tensioni principali sono nulle perché

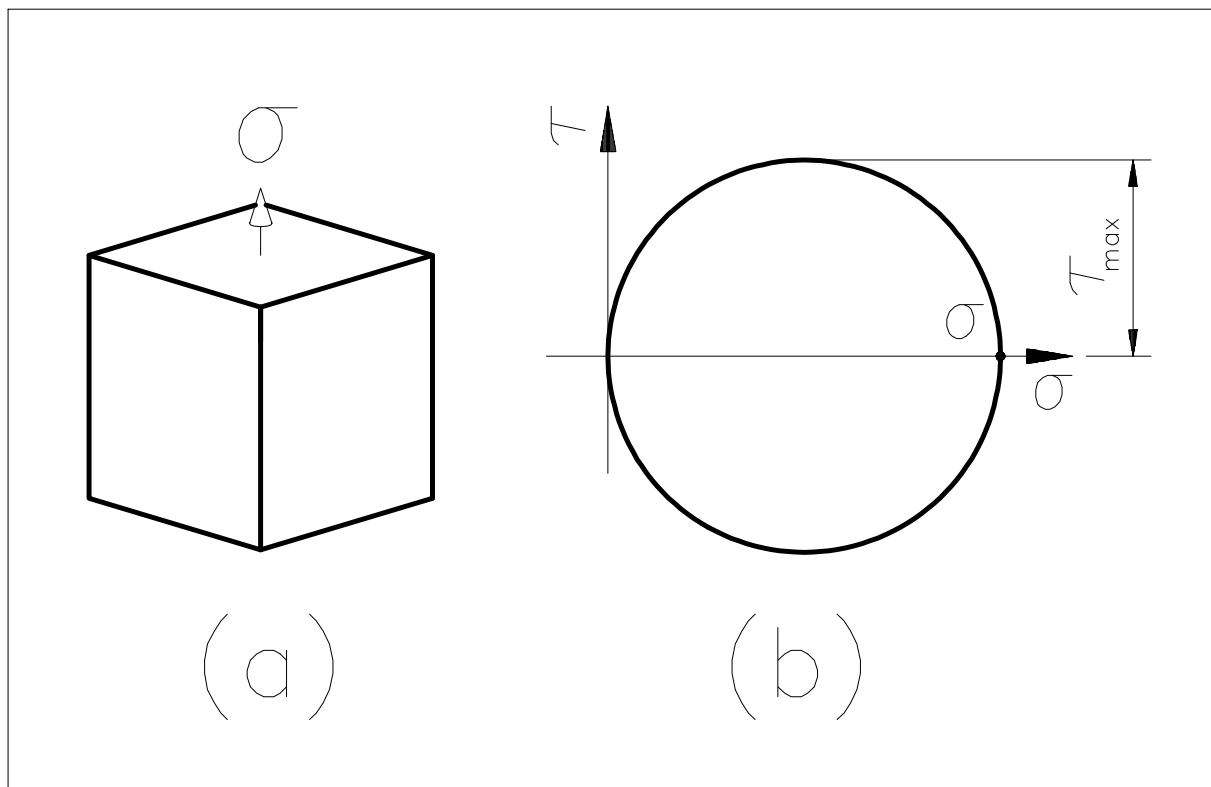


Figura 2.1.3.2

Error! Bookmark not defined.

lo stato tensionale è monodimensionale. Le tre tensioni principali sono quindi $\sigma_1, 0, 0$. I tre cerchi di Mohr hanno come punti diametralmente opposti lungo il diametro orizzontale le coppie delle tensioni principali. Nel nostro caso, i tre cerchi di Mohr hanno come punti diametralmente opposti lungo il diametro orizzontale le coppie di tensioni $0, \sigma_1$; $0, 0$; $0, 0$. Un cerchio di Mohr degenera quindi in un punto coincidente con l'origine del piano di Mohr, mentre gli altri due cerchi ci sovrappongono. Quindi, dei tre valori titolati ad essere la tensione tangenziale massima, un valore è nullo perché riferito al cerchio di Mohr di diametro nullo, mentre gli altri due valori coincidono perché i due corrispondenti cerchi di Mohr coincidono, e questi valori rappresentano quindi la tensione tangenziale massima. Inoltre si deriva graficamente dalla Figura 2.1.3.2 (b) che per lo stato monodimensionale la tensione tangenziale massima vale la metà della tensione σ_1 , cioè τ_{max} è il doppio della τ_{max} .

Se quindi si è in presenza di uno stato tensionale tridimensionale definito dalle tre tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, lo stato monodimensionale equivalente secondo Guest si individua come segue. Si calcolano i tre valori $\sigma_1 - \sigma_2/2, \sigma_2 - \sigma_3/2, \sigma_3 - \sigma_1/2$, e si individua il massimo tra questi tre valori, che rappresenta la tensione tangenziale massima. Siccome poi nello stato tensionale monodimensionale di sforzo normale σ_1 è il doppio della τ_{max} , la tensione σ_1 del caso monodimensionale equivalente deve valere il doppio della tensione tangenziale massima del caso tridimensionale. Così facendo, la tensione tangenziale massima dello stato tensionale tridimensionale eguaglia quella dello stato monodimensionale di sforzo normale, e quindi i due stati tensionali sono ritenuti equivalenti.

Siccome si è diviso per 2 per trovare la τ_{max} nel caso tridimensionale, e poi si è moltiplicato per 2 per trovare la σ_1 nel caso monodimensionale, da un punto di vista operativo è più semplice abbandonare l'idea di τ_{max} , riferendosi direttamente alle σ , o meglio ai diametri del cerchio di Mohr (differenze di σ) e non ai raggi del cerchio di Mohr (τ_{max}).

Una riformulazione della teoria della massima tensione tangenziale è quindi la seguente: uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando il diametro del massimo cerchio di Mohr è lo stesso nei due casi, quello tridimensionale e quello monodimensionale equivalente.

Per esempio, in uno stato tensionale piano riferito alle tensioni principali σ_1 e σ_2 , caso (A1) di Figura 2.1.1, la tensione ideale è il valore massimo tra :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \quad ; \quad |\sigma_1 - 0| = |\sigma_1| \quad ; \quad |\sigma_2 - 0| = |\sigma_2| \quad (2.1.3.1)$$

Si considera ora uno stato tensionale piano incompleto, caso (A2) di Figura 2.1.1 , caratterizzato dalla presenza di σ_x e di τ_{xy} . Le due tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.3.2)$$

dove σ_x denota la sola tensione normale presente, cioè σ_x , e τ_{xy} indica τ_{xy} . Le due tensioni principali hanno segni discordi, dato che $(\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2) > 0$. Di conseguenza, $\sigma_1 - \sigma_2$ prevale su σ_1 e su σ_2 , per cui la tensione ideale è sicuramente $\sigma_1 - \sigma_2$. Seguendo quindi la (2.1.3.1) , la tensione ideale vale :

$$\sigma_{id} = |\sigma_1 - \sigma_2| = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.3.3)$$

Più genericamente, per lo stato tensionale piano completo, caso (A3) di Figura 2.1.1 , individuato dalla presenza di σ_x , σ_y e di τ_{xy} (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle) , le due tensioni principali nel piano delle tensioni (la terza tensione principale è nulla, dato che lo stato è piano di tensione) valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.3.4)$$

Diversamente dal caso piano incompleto, le due tensioni principali possono avere segni discordi oppure concordi. La tensione ideale è dunque il massimo tra $\sigma_1 - \sigma_2$, σ_1 , e σ_2 . Seguendo quindi la (2.1.3.1) , la tensione ideale vale :

$$\sigma_{id} = \max [|\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1|; |\sigma_2|] = \max \left[\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} ; \left| \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right| \right] \quad (2.1.3.5)$$

Infine, per uno stato tensionale tridimensionale completo riferito per semplicità alle direzioni principali, caso (B1) di Figura 2.1.1 , individuato

dalle tensioni principali σ_1 , σ_2 , e σ_3 , la tensione ideale è il valore massimo tra :

$$|\sigma_1 - \sigma_2| \quad ; \quad |\sigma_2 - \sigma_3| \quad ; \quad |\sigma_3 - \sigma_1| \quad (2.1.3.6)$$

Si esaminano ora i due controlli esposti nel Paragrafo 2.1, sul rapporto, implicito nella teoria, tra tensione critica σ_{cr} ed σ_{id} , e sul valore della tensione ideale in presenza di uno stato tensionale idrostatico. Se si calcola la tensione ideale per un caso di taglio puro, Figura 2.1.2, si deduce, per esempio dalla (2.1.3.3) ponendo nulla :

$$\sigma_{id} = 2 |\tau| \quad (2.1.3.7)$$

Quando la tensione σ raggiunge un valore che provoca lo snervamento σ_{cr} del materiale, quando cioè si raggiunge la criticità σ_{cr} , la tensione ideale, se producesse lo stesso grado di sofferenza del materiale, dovrebbe causare lo snervamento σ_{cr} del materiale. In altre parole, se il primo membro della (2.1.3.7), cioè la σ_{id} ideale, raggiunge la criticità, anche il secondo membro della (2.1.3.7), cioè $2 |\tau|$, deve raggiungere la criticità :

$$\sigma_{id} = \sigma_{cr} = 2 |\tau_{cr}| \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = 2 \quad (2.1.3.8)$$

Quindi la teoria della massima tensione tangenziale contiene al suo interno un rapporto teorico di 2 tra la tensione critica σ_{cr} e quella τ_{cr} , in accordo col valore 2 misurato sperimentalmente per gli acciai in relazione allo snervamento σ_{cr} ed τ_{cr} . Si conclude che tale teoria passa il test relativo al rapporto tra tensione critica σ_{cr} ed τ_{cr} per gli acciai.

Il secondo controllo riguarda uno stato idrostatico, con le tre tensioni principali uguali tra loro, Figura 2.1.2. Dalla (2.1.3.6) si deriva che la tensione ideale è nulla per uno stato tensionale idrostatico. Infatti per uno stato tensionale idrostatico i tre cerchi di Mohr degenerano in un punto, cioè il loro diametro diventa nullo. Di conseguenza, la teoria della massima tensione tangenziale passa il test sulla tensione idrostatica che richiede che, in presenza di uno stato tensionale idrostatico, il valore della tensione ideale risulti molto basso rispetto alla tensione idrostatica.

Siccome la teoria della tensione tangenziale massima passa sia il primo controllo in relazione agli acciai, che il secondo controllo, tale teoria appare promettente per gli acciai. Confronti con dati sperimentali

relativamente a stati tensionali più generici di quelli di taglio puro e di tensione idrostatica mostrano che la teoria di Guest è applicabile agli acciai per uno stato tensionale generico.

2.1.4 Teoria della massima energia di deformazione (lavoro di deformazione, teoria di Beltrami)

Si premette che la teoria della massima energia di deformazione non viene impiegata in pratica. Tuttavia la si include in questo testo per ragioni storiche e perché costituisce una validissima introduzione alla teoria della massima energia di distorsione.

Secondo questa teoria, uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando l'energia di deformazione del caso tridimensionale eguaglia l'energia di deformazione del caso monodimensionale di trazione.

Occorrerà quindi esprimere l'energia di deformazione (o lavoro di deformazione) per unità di volume per un generico stato tensionale, ed eguagliarla all'energia di deformazione dello stato tensionale monodimensionale ritenuto equivalente. L'energia di deformazione è espressa da prodotti tra tensione e deformazione, ma può anche essere formulata in funzione delle sole tensioni, eliminando le deformazioni tramite l'impiego della legge di Hooke, e confinando quindi l'impiego della teoria a stati tensionali elastici lineari. Eguagliando quindi l'energia di deformazione riferita ad un generico stato tensionale ed espressa in termini delle sole tensioni, all'energia di deformazione dello stato monodimensionale equivalente formulata in termini della sola tensione monodimensionale, si riesce a stabilire il legame tra le tensioni che definiscono lo stato tensionale generico, e la tensione del caso monoassiale equivalente, che è quindi la tensione ideale.

Il lavoro di deformazione L_{def} per uno stato tensionale monodimensionale caratterizzato da una tensione vale :

$$L_{def} = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad L_{def} = \frac{\sigma^2}{2 E} \quad (2.1.4.1)$$

Si noti che nella (2.1.4.1) , tramite la legge di Hooke, si è eliminato ε e non σ , perché si punta ad una σ_{id} e non ad una ε_{id} .

Indichiamo con σ_{id} , la tensione dello stato monodimensionale che vogliamo equivalente allo stato tensionale generico. Dalla (2.1.4.1) il lavoro di deformazione è quindi :

$$L_{def} = \frac{\sigma_{id}^2}{2 E} \quad (2.1.4.2)$$

Per uno stato tensionale piano riferito alle tensioni principali σ_1 e σ_2 , caso (A1) di Figura 2.1.1, il lavoro di deformazione vale :

$$L_{def} = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 \Rightarrow$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu \sigma_2) \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu \sigma_1) \Rightarrow \quad (2.1.4.3)$$

$$L_{def} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2)$$

Eguagliando il lavoro di deformazione per lo stato piano, espresso dalla (2.1.4.3), al lavoro di deformazione per lo stato monoassiale che si vuole equivalente, espresso dalla (2.1.4.2), si ottiene l'espressione della tensione ideale :

$$\frac{\sigma_{id}^2}{2E} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2) \Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2} \quad (2.1.4.4)$$

Si considera ora uno stato tensionale piano incompleto, caso (A2) di Figura 2.1.1, caratterizzato dalla presenza di σ_x e di τ_{xy} . Le due tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (2.1.4.5)$$

dove σ denota la sola tensione normale presente, cioè σ_x , e τ indica τ_{xy} . Sostituendo i valori di σ_1 e σ_2 nell'espressione della σ_{id} della (2.1.4.4), si ottiene il valore della tensione ideale per lo stato piano incompleto. Non conviene però esplicitare tale espressione in funzione di σ e di τ , perché risulta troppo lunga. Conviene invece calcolare prima σ_1 e σ_2 dalla (2.1.4.5), e poi σ_{id} dalla (2.1.4.4).

Si considera ora uno stato tensionale piano completo, caso (A3) di Figura 2.1.1, individuato dalla presenza di σ_x , σ_y e di τ_{xy} (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle). Le due tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni (la terza tensione principale è nulla, dato che lo stato è piano di tensione) valgono :

Error! Bookmark not defined.

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.4.6)$$

Sostituendo i valori di σ_1 e σ_2 nell'espressione della σ_{id} della (2.1.4.4) , si ottiene il valore della tensione ideale per lo stato piano completo. Come per lo stato piano incompleto, non conviene esplicitare tale espressione in funzione di σ_x , σ_y e di τ_{xy} , perché risulta troppo complessa. Conviene invece calcolare prima σ_1 e σ_2 dalla (2.1.4.6) , e poi σ_{id} dalla (2.1.4.4) .

Infine, per uno stato tensionale tridimensionale completo riferito per semplicità alle direzioni principali, caso (B1) di Figura 2.1.1 , individuato dalle tre tensioni principali σ_1 , σ_2 , e σ_3 , il lavoro di deformazione vale :

$$\begin{aligned} L_{def} &= \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3 \Rightarrow \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] \quad ; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)] \quad ; \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)] \Rightarrow \\ L_{def} &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \end{aligned} \quad (2.1.4.7)$$

Eguagliando il lavoro di deformazione per lo stato tensionale tridimensionale completo, espresso dalla (2.1.4.7) , al lavoro di deformazione per lo stato monoassiale che si vuole equivalente a quello tridimensionale, lavoro espresso dalla (2.1.4.2) , si ottiene l'espressione della tensione ideale per lo stato tensionale tridimensionale completo :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{id}^2}{2E} &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)] \Rightarrow \\ \sigma_{id} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2 \nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)} \end{aligned} \quad (2.1.4.8)$$

Si esaminano ora i due controlli esposti nel Paragrafo 2.1 , sul rapporto, implicito nella teoria, tra tensione critica σ_{ed} ed σ_{id} , e sul valore della tensione ideale in presenza di uno stato tensionale idrostatico. Se si calcolano le tensioni principali per un caso di taglio puro, Figura 2.1.2 , si deduce, per esempio dalla (2.1.4.5) ponendo nulla :

Error! Bookmark not defined.

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \pm \tau \quad (2.1.4.9)$$

Sostituendo tali valori nell'espressione della σ_{id} della (2.1.4.4), si ottiene :

$$\sigma_{id} = \sqrt{2(1+\nu)} |\tau| \approx 1.61 |\tau| \quad (\nu = 0.3) \quad (2.1.4.10)$$

Quando la tensione raggiunge un valore che provoca lo snervamento a del materiale, quando cioè si raggiunge la criticità a , la tensione ideale, se producesse lo stesso grado di sofferenza del materiale, dovrebbe causare lo snervamento a del materiale. In altre parole, se il primo membro della (2.1.4.10), cioè la σ_{id} ideale, raggiunge la criticità, anche il secondo membro della (2.1.4.10), cioè 1.61 , deve raggiungere la criticità :

$$\sigma_{id} = \sigma_{cr} = \sqrt{2(1+\nu)} |\tau_{cr}| \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = \sqrt{2(1+\nu)} \approx 1.61 \quad (\nu = 0.3) \quad (2.1.4.11)$$

Quindi la teoria della massima energia di deformazione contiene al suo interno un rapporto teorico di 1.61 tra la tensione critica a e quella a per gli acciai, ormai abbastanza lontano dal valore 2 misurato sperimentalmente per gli acciai in relazione allo snervamento a ed a . Si conclude che tale teoria non passa il test relativo al rapporto tra tensione critica a ed a per gli acciai.

Il secondo controllo riguarda uno stato tensionale idrostatico, con le tre tensioni principali uguali tra loro, Figura 2.1.2 . Dalla (2.1.4.7) si deriva che la tensione ideale vale :

$$\sigma_{id} = \sqrt{3(1-2\nu)} |\sigma| \approx 1.1 |\sigma| \quad (\nu = 0.3) \quad (2.1.4.12)$$

Il rapporto tra tensione ideale e tensione idrostatica (in modulo) vale quindi 1.1 . Di conseguenza, la teoria della massima energia di deformazione non passa il test sulla tensione idrostatica che richiede che, in presenza di uno stato tensionale idrostatico, il valore della tensione ideale risulti molto basso rispetto alla tensione idrostatica.

Siccome la teoria della massima energia di deformazione non passa nessuno dei due controlli, il primo relativo al rapporto tra tensione critica a

ed α , ed il secondo relativo ad uno stato tensionale idrostatico, tale teoria non è applicabile agli acciai.

2.1.5 Teoria della massima energia di distorsione

(lavoro di distorsione , teoria di Henky , Huber , Von Mises , teoria di Von Mises)

Secondo questa teoria, uno stato triassiale completo è equivalente ad uno monodimensionale trattivo quando l'energia di distorsione del caso tridimensionale eguaglia l'energia di distorsione del caso monodimensionale di trazione.

Si ricorda che il lavoro di distorsione si differenzia dal lavoro di deformazione perché il lavoro di deformazione tien conto di tutta l'energia elastica, mentre il lavoro di distorsione considera solo l'energia elastica connessa alla parte deviatorica delle tensioni, quella cioè associata alla variazione di forma e non di volume del cubetto, trascurando quindi la parte idrostatica, quella cioè connessa alla variazione di volume e non di forma del cubetto. In altre parole, il lavoro di distorsione si ottiene sottraendo al lavoro di deformazione, che tien conto dell'intera energia elastica, il lavoro idrostatico compiuto dalla parte idrostatica delle tensioni in seguito alla variazione di volume del cubetto. Si riveda anche la distinzione tra parte deviatorica ed idrostatica delle tensioni nel Capitolo sui richiami di Teoria dell'elasticità. Si impiega l'energia di distorsione e non l'energia di deformazione, perché si ritiene che la parte idrostatica delle tensioni non danneggi il materiale. Di conseguenza, si depura l'energia di deformazione dalla parte idrostatica che, non essendo dannosa, non deve apparire nelle formule che esprimono il grado di sofferenza del materiale

Occorre quindi esprimere l'energia di distorsione (o lavoro di distorsione) per unità di volume per un generico stato tensionale, ed eguagliarla all'energia di distorsione dello stato tensionale monodimensionale ritenuto equivalente. Come l'energia di deformazione, anche l'energia di distorsione è espressa tramite prodotti tra tensione e deformazione, ma può anche essere formulata in funzione delle sole tensioni (si ricerca infatti una ideale e non una ideale), eliminando le deformazioni tramite l'impiego della legge di Hooke, e confinando quindi l'impiego della teoria a stati tensionali elastici lineari. Eguagliando quindi l'energia di distorsione riferita ad un generico stato tensionale ed espressa in termini delle sole tensioni, all'energia di distorsione dello stato monodimensionale equivalente formulata in termini della sola tensione monodimensionale, si riesce a stabilire il legame tra le tensioni che definiscono lo stato tensionale generico, e la tensione del caso monoassiale equivalente, che è quindi la tensione ideale.

Si riassumono nel seguito alcuni elementi di teoria dell'elasticità correlati allo stato tensionale e deformativo idrostatico. La componente idrostatica delle tensioni σ_{idr} è la media delle tre tensioni principali :

$$\sigma_{idr} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (2.1.5.1)$$

Per un generico stato tensionale, la componente idrostatica delle tensioni σ_{idr} va immaginata come uno stato tensionale idrostatico, cioè con le tre tensioni principali applicate al cubetto elementare tra loro uguali, e di intensità σ_{idr} espressa dalla (2.1.5.1) . La deformazione volumetrica relativa $\Delta V/V$, dove V rappresenta il volume del cubetto, dovuta ad una tensione idrostatica σ_{idr} , si può esprimere in funzione delle deformazioni principali come segue :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \quad (2.1.5.2)$$

Il legame tra la deformazione volumetrica relativa $\Delta V/V$ e la tensione idrostatica σ_{idr} è stato trattato nel Capitolo sui Richiami di Teoria dell'elasticità, Paragrafo 4 , ed è il seguente :

$$\sigma_{idr} = K \frac{\Delta V}{V} \quad ; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (2.1.5.3)$$

dove K è il Bulk Modulus, o modulo di comprimibilità cubica, che diventa infinito per materiale incompressibile, caratterizzato da $\nu = 0.5$. Quindi un K elevato indica scarsa comprimibilità cubica del materiale, esattamente come un E elevato indica scarsa flessibilità. (Per memorizzare correttamente l'espressione $\sigma_{idr} = K \Delta V/V$, ed in particolare per evitare di scrivere l'espressione errata $\Delta V/V = K \sigma_{idr}$, si consiglia di farne il parallelo con l'espressione $\sigma = E \epsilon$, dove σ e ϵ sono le tensioni, $\Delta V/V$ ed ϵ sono le deformazioni, e K ed E sono le costanti elastiche.)

Infine, il lavoro idrostatico vale :

$$L_{idr} = \frac{1}{2} \sigma_{idr} \frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma_{idr}^2}{2 K} \quad (2.1.5.4)$$

Nel seguito si derivano le espressioni delle tensioni ideali secondo il lavoro di distorsione per i casi di stato piano espresso secondo le tensioni

principali, per lo stato piano incompleto, completo, e per lo stato tridimensionale espresso in termini delle tensioni principali. Il punto di partenza è la determinazione del lavoro di distorsione per uno stato tensionale monodimensionale, in presenza quindi della σ_{idr} .

Il lavoro di distorsione L_{dist} per uno stato tensionale monodimensionale caratterizzato da una tensione si calcola come differenza tra il lavoro di deformazione ed il lavoro idrostatico. La σ_{idr} vale :

$$\sigma_{idr} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma + 0 + 0}{3} = \frac{\sigma}{3} \quad (2.1.5.5)$$

Il lavoro idrostatico per uno stato tensionale monodimensionale vale, dalla (2.1.5.4) :

$$L_{idr} = \frac{\left(\frac{\sigma}{3}\right)^2}{2 K} = \frac{\sigma^2}{18 K} = \frac{\sigma^2 3(1-2 \nu)}{18 E} = \frac{1-2 \nu}{6 E} \sigma^2 \quad (2.1.5.6)$$

Il lavoro di deformazione è espresso dalla (2.1.4.2) . Il lavoro di distorsione L_{dist} per uno stato tensionale monodimensionale vale :

$$L_{dist} = L_{def} - L_{idr} = \frac{\sigma^2}{2 E} - \frac{\sigma^2 (1-2 \nu)}{6 E} = \frac{\sigma^2}{2 E} \left(1 - \frac{1-2 \nu}{3}\right) = \frac{1+\nu}{3 E} \sigma^2 \quad (2.1.5.7)$$

Si esamina ora uno stato tensionale piano riferito alle tensioni principali σ_1 e σ_2 , caso (A1) di Figura 2.1.1 . Il lavoro di deformazione è espresso dalla (2.1.4.3). Il lavoro idrostatico è espresso dalla (2.1.5.6), dove σ_{idr} è espressa dalla (2.1.5.4) tramite la (2.1.5.1) . Il lavoro di distorsione vale quindi :

$$\begin{aligned}
L_{dist} &= L_{def} - L_{idr} = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2) - \frac{1}{2K} \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{3} \right)^2 = \\
&= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2) - \frac{3(1-2\nu)}{2E} \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2}{9} \right) = \\
&= \frac{1}{2E} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu \sigma_1 \sigma_2 - \frac{(1-2\nu)}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1 \sigma_2) \right] = \\
&= \frac{1}{2E} \left[\frac{2(1+\nu)}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - \frac{2(1+\nu)}{3} \sigma_1 \sigma_2 \right] = \\
&= \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2)
\end{aligned}
\tag{2.1.5.8}$$

Eguagliando il lavoro di distorsione per lo stato piano, espresso dalla (2.1.5.8), al lavoro di distorsione per lo stato monoassiale che si vuole equivalente, per cui la tensione viene indicata come σ_{id} , ed espresso dalla (2.1.5.7), si ottiene l'espressione della tensione ideale :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) &= \frac{1+\nu}{3E} \sigma_{id}^2 \Rightarrow \\
\sigma_{id} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}
\end{aligned}
\tag{2.1.5.9}$$

Si considera ora uno stato tensionale piano incompleto, caso (A2) di Figura 2.1.1, caratterizzato dalla presenza di σ_x e di τ_{xy} . Le due tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}
\tag{2.1.5.10}$$

dove σ denota la sola tensione normale presente, cioè σ_x , e τ indica τ_{xy} . Sostituendo i valori di σ_1 e σ_2 della (2.1.5.10) nell'espressione della σ_{id} della (2.1.5.9), si ottiene il valore della tensione ideale per lo stato piano incompleto. Contrariamente ai calcoli paralleli incontrati nell'espressione della tensione ideale secondo il lavoro di deformazione, per il lavoro di distorsione si ottiene una formula compatta della tensione ideale espressa

in funzione di σ e di τ . Per facilitare i calcoli conviene scrivere, sulla base della (2.1.5.10) :

$$\sigma_1 = a + b \quad ; \quad \sigma_2 = a - b \quad ; \quad a = \frac{\sigma}{2} \quad , \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (2.1.5.11)$$

Sostituendo tali espressioni delle tensioni principali nell'espressione della tensione ideale della (2.1.5.9), si ottiene :

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{(a^2 + b^2 + 2 a b) + (a^2 + b^2 - 2 a b) - (a + b)(a - b)} = \\ &= \sqrt{a^2 + 3 b^2} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \frac{3}{4} (\sigma^2 + 4 \tau^2)} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \end{aligned} \quad (2.1.5.12)$$

Si considera ora uno stato tensionale piano completo, caso (A3) di Figura 2.1.1 , individuato dalla presenza di σ_x , σ_y e di τ_{xy} (avendo assunto uno stato piano di tensione, σ_z , τ_{xz} e τ_{yz} sono nulle) . Le due tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni (la terza tensione principale è nulla, dato che lo stato è piano di tensione) valgono :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.5.13)$$

Come per lo stato piano incompleto, per facilitare i calcoli conviene scrivere, sulla base della (2.1.5.13) :

$$\sigma_1 = a + b \quad ; \quad \sigma_2 = a - b \quad ; \quad a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad , \quad b = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \quad (2.1.5.14)$$

Tenendo conto della espressione della tensione ideale in funzione delle variabili ausiliarie a e b , espressione contenuta nella (2.1.5.12) , e sostituendo ad a e b le espressioni delle (2.1.5.14), si ottiene :

$$\sigma_{id} = \sqrt{a^2 + 3b^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y) + \frac{3}{4}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y + 4\tau_{xy}^2)} =$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}$$

(2.1.5.15)

Infine, per uno stato tensionale tridimensionale completo riferito per semplicità alle direzioni principali, caso (B1) di Figura 2.1.1 , individuato dalle tre tensioni principali σ_1 , σ_2 , e σ_3 , il lavoro di distorsione vale:

$$L_{dist} = L_{def} - L_{idr} =$$

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] - \frac{\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2}{2K} =$$

$$\frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] -$$

$$\frac{(1 - 2\nu)[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]}{6E} =$$

$$\frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

(2.1.5.16)

Eguagliando il lavoro di distorsione per lo stato tensionale tridimensionale completo, espresso dalla (2.1.5.16) , al lavoro di distorsione per lo stato monoassiale che si vuole equivalente a quello tridimensionale, lavoro espresso dalla (2.1.5.7) , si ottiene l'espressione della tensione ideale per lo stato tensionale tridimensionale completo :

$$\frac{1 + \nu}{3E} \sigma_{id}^2 = \frac{1 + \nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \Rightarrow$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1}$$

(2.1.5.17)

Una forma alternativa, ma del tutto equivalente, dell'espressione della tensione ideale della (2.1.5.17) per uno stato tensionale tridimensionale completo è la seguente (si verifichi l'identità con l'aiuto di un manipolatore algebrico) :

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.1.5.18)$$

Per uno stato tridimensionale completo non riferito alle direzioni principali, l'espressione della tensione ideale può essere ricavata come estensione della (2.1.5.15) :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_x + 3 \tau_{xy}^2 + 3 \tau_{yz}^2 + 3 \tau_{zx}^2} \quad (2.1.5.19)$$

Si esaminano ora i due controlli esposti nel Paragrafo 2.1 , sul rapporto, implicito nella teoria, tra tensione critica σ_{cr} ed τ_{cr} , e sul valore della tensione ideale in presenza di uno stato tensionale idrostatico. Se si calcolano le tensioni principali per un caso di taglio puro, Figura 2.1.2 , si deduce, per esempio dalla (2.1.5.10) ponendo $\sigma_3 = 0$:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \pm \tau \quad (2.1.5.20)$$

Sostituendo tali valori nell'espressione della σ_{id} della (2.1.5.9), si ottiene :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{3} |\tau| \approx 1.73 |\tau| \quad (2.1.5.21)$$

Quando la tensione σ raggiunge un valore che provoca lo snervamento σ_{cr} del materiale, quando cioè si raggiunge la criticità σ_{cr} , la tensione ideale, se producesse lo stesso grado di sofferenza del materiale, dovrebbe causare lo snervamento σ_{cr} del materiale. In altre parole, se il primo membro della (2.1.5.21), cioè la σ_{id} ideale, raggiunge la criticità, anche il secondo membro della (2.1.5.21), cioè $3 \tau^2 = 1.73^2 \tau_{cr}^2$, deve raggiungere la criticità :

$$\sigma_{id} = \sigma_{cr} = \sqrt{3} |\tau_{cr}| \Rightarrow \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} = \sqrt{3} \approx 1.73 \quad (2.1.5.22)$$

Quindi la teoria della massima energia di distorsione contiene al suo interno un rapporto teorico di 1.73 tra la tensione critica σ_c e quella σ_{id} , in buon accordo col valore 2 o poco meno misurato sperimentalmente per gli acciai in relazione allo snervamento σ_s ed σ_{id} . Si conclude che tale teoria passa il test relativo al rapporto tra tensione critica σ_c ed σ_{id} per gli acciai.

Il secondo controllo riguarda uno stato tensionale idrostatico, con le tre tensioni principali uguali tra loro, Figura 2.1.2. Dalla (2.1.5.18) si deriva immediatamente che la tensione ideale è nulla per uno stato idrostatico. Si noti che l'espressione equivalente della tensione ideale della (2.1.5.17) non mostra con eguale evidenza che la tensione ideale si annulla per uno stato idrostatico. Si noti inoltre che, essendo la tensione ideale secondo il lavoro di distorsione basata su una teoria che depura dalla componente idrostatica l'energia elastica complessiva, se uno stato tensionale è puramente idrostatico, la tensione ideale deve necessariamente annullarsi perché l'energia elastica è tutta idrostatica.

La teoria della massima energia di distorsione passa quindi il test sulla tensione idrostatica che richiede che, in presenza di uno stato tensionale idrostatico, il valore della tensione ideale risulti molto basso rispetto alla tensione idrostatica.

Siccome la teoria della massima energia di distorsione passa entrambi i controlli, il primo relativo al rapporto tra tensione critica σ_c ed σ_{id} per gli acciai, ed il secondo relativo ad uno stato tensionale idrostatico, tale teoria appare promettente per gli acciai. Confronti con dati sperimentali relativamente a stati tensionali più generici di quelli di taglio puro e di tensione idrostatica mostrano che la teoria della massima energia di distorsione è applicabile agli acciai per uno stato tensionale generico.

2.1.6 Osservazioni conclusive sulle teorie del collasso per carichi statici

Le varie teorie del collasso riflettono un lato dello sviluppo storico della teoria dell'elasticità. Le teorie della massima tensione principale e della massima tensione tangenziale prendono in considerazione solo le tensioni, la teoria della massima deformazione considera una combinazione lineare delle tensioni principali coll'intervento di σ_{id} (si vedano le (2.1.2.9)), mentre le teorie della massima energia di deformazione e della massima energia di distorsione sono basate su idee energetiche, e considerano prodotti tra tensione e deformazione (si vedano le (2.1.4.7)). Queste tensioni ideali energetiche riflettono il periodo storico dell'interesse verso i teoremi energetici impiegati nella risoluzione di strutture, quali i lavori virtuali o Castigliano. Anche nella tecnica numerica degli elementi finiti si impiegano approcci energetici per collegare lo stato tensionale all'interno dell'elemento alle forze nodali equivalenti.

Un'altra osservazione, a cui si è già accennato nel Paragrafo 1, è relativa al fatto che le formule delle tensioni ideali espresse in termini delle tensioni principali non cambiano (salvo la tensione ideale secondo la σ_{max} , nella sua variazione) se si cambiano contemporaneamente i segni di tutte le tensioni principali. In altre parole, le tensioni ideali non distinguono tra uno stato tensionale trattivo ed uno compressivo, mentre i risultati sperimentali mostrano decisamente che quasi tutti i materiali resistono meglio a compressione. Questa osservazione chiarisce perché si consideri normalmente solo la parte a tensione media positiva del diagramma di Goodman. Dato che la tensione ideale non distingue tra trazione e compressione, è opportuno riferirsi ai dati sulla resistenza dei materiali più favorevoli alla sicurezza, cioè alla resistenza a trazione. Applicando questa idea alla Fatica, occorre riferirsi alla parte del diagramma di Goodman con tensione media positiva, che cioè veda cicli di fatica con la tensione superiore positiva e maggiore in modulo della tensione inferiore, negativa.

Una ulteriore osservazione riguarda il fatto che la tensione ideale è assunta come una funzione di punto delle tensioni principali :

$$\sigma_{id} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.1.6.1)$$

In altre parole, per calcolare la tensione ideale in un punto si ritiene che basti conoscere lo stato tensionale in quel punto. Vi sono però molti risultati sperimentali che indicano chiaramente che lo stato di sofferenza del materiale dipende anche dal gradiente della tensione. Per esempio, per carichi statici, lo snervamento a flessione è maggiore dello

snervamento a trazione. Se la tensione ideale fosse funzione di punto, i due valori dello snervamento dovrebbero coincidere. Invece, quando la tensione massima agisce su porzioni ristrette del materiale, cioè quando il gradiente di tensione nell'intorno del massimo di tensione è alto (caso per esempio della flessione, dove la farfalla delle tensioni produce un gradiente di tensione) il grado di sofferenza del materiale è minore, ed il collasso (in questo caso lo snervamento) avviene per valori maggiori della tensione ideale.

Similmente, per carichi affaticanti, la ridistribuzione delle tensioni è maggiore quando il gradiente di tensione nell'intorno del massimo di tensione è maggiore. Questo fatto è espresso dal coefficiente k , il quale si abbassa rispetto al valore 1 per raggi molto piccoli. L'abbassamento dal valore 1 è un indice di ridistribuzione di tensione perché, ricordando il legame tra k e k , e cioè $k = 1 + k(k - 1)$, k diventa tanto minore di k quanto minore è k rispetto ad 1. Se il raggio di raccordo è molto piccolo, il picco di tensione diventa molto localizzato, ed il gradiente di tensione aumenta. Sono queste le situazioni in cui la ridistribuzione delle tensioni è facilitata, perché esistono zone sottotensionate molto adiacenti a quelle a più alta tensione, e su queste zone sottotensionate si può ridistribuire almeno in parte il picco di tensione. In conclusione, anche per carichi affaticanti, a parità di tensione massima, lo stato tensionale è meno nocivo quando il gradiente di tensione è alto, quando cioè il picco di tensione agisce su una zona limitata. Purtroppo questa influenza del gradiente di tensione non è considerata da nessuna delle teorie della tensione ideale, in parte per le complessità matematiche nell'individuare il gradiente di tensione, e in parte per le difficoltà di reperimento dei dati sperimentali necessari allo sviluppo di una tale teoria.

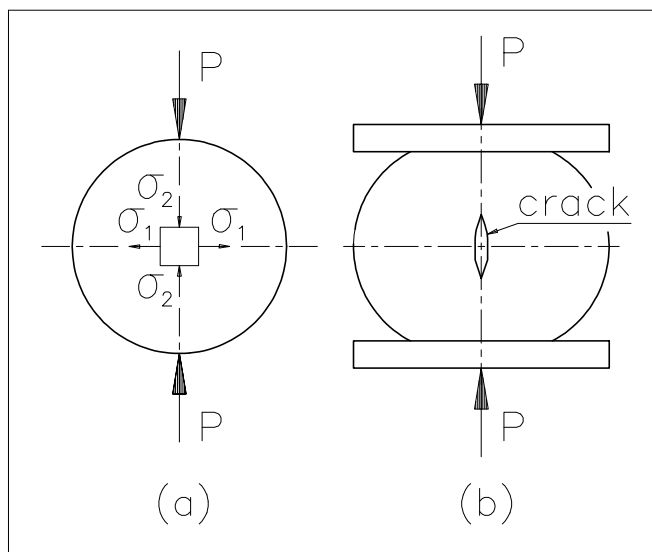


Figura 2.1.6.1

A proposito dell'influenza del gradiente di tensione sulla tensione ideale, si riporta un brano estratto da un articolo su una particolare prova sperimentale di rottura per calcestruzzi e marmi, prova che permette di misurare sperimentalmente la tensione di rottura di tali materiali. Questa prova sperimentale si chiama "Brazilian test", e consiste nello schiacciare diametralmente un disco pieno, Figura 2.1.6.1 (a).

La prova è quindi di compressione, ma al centro del disco nascono anche delle tensioni trattive σ_1 che, essendo più nocive di quelle compressive, causano la rottura di questi materiali fragili. In questo senso, tale prova viene classificata come una prova indiretta a trazione. Questi studi hanno rilevanza anche relativamente a guarnizioni elastomeriche tipo OR le quali, quando vengono compresse, Figura 2.1.6.1 (b), possono fessurarsi al centro a causa delle tensioni trattive che là si generano. In un articolo sul "Brazilian test" si legge (si intenda "*inhomogeneous*" nel senso di "non costanti") :

Since the stresses [near the disk centre] are inhomogeneous, stress gradients exist which may well affect failure.

Questa frase conferma che, nel calcolo della tensione ideale, occorrerebbe tener conto anche del gradiente della tensione.

Si osserva inoltre che **i piani di frattura del materiale non sono strettamente correlati alla teoria di collasso adottata**. Per esempio, se si adotta la teoria della σ_{max} , ciò non significa che il materiale cede lungo il piano che contiene la massima tensione tangenziale. Per esempio, la teoria della σ_{max} è applicabile agli acciai, ma se si assoggetta un provino cilindrico a trazione semplice, il piano di frattura è perpendicolare all'asse del provino, cioè alla massima di trazione, e non alla massima σ_{θ} , secondo la quale il crack dovrebbe invece giacere su di un piano a 45° rispetto all'asse del provino.

Le varie formule delle tensioni ideali per tensioni statiche sono raggruppate nelle Tabelle 3.1 e 3.2. La seguente Tabella 2.1.6.1 riassume invece, come risultato dei due controlli sulla bontà delle formulazioni, il rapporto σ_{cr}/σ_{cr} ed il rapporto σ_{id}/σ_{idr} per le varie teorie del collasso. Da questa Tabella, e dall'insieme dei dati sperimentali, si ricava che **la tensione ideale secondo la σ_{max} , in versione modificata, è applicabile ai materiali fragili quali le ceramiche per impiego biomedico ed i vetri, mentre le tensioni ideali secondo la σ_{max} od il L_{dist} sono applicabili agli acciai, sia a quelli da cementazione (più fragili) che da bonifica (più duttili). In particolare, la tensione ideale secondo la σ_{max} è impiegata nel calcolo dei tubi**, perché possiede una evidenza grafica che ne facilita l'applicazione in relazione ai diagrammi lineari delle tensioni nei tubi (si veda il Capitolo sui tubi).

La Figura 2.1.6.2 riporta, per uno stato di tensione piana ed in funzione delle tensioni principali σ_1 e σ_2 nel piano delle tensioni, i contorni delle zone di resistenza per le varie teorie della tensione ideale.

TENSIONE IDEALE - CARICHI STATICI
--

TEORIA	cr/cr	id/idr
max	1	1
max	$1 + \nu = 1.3 \quad (\nu = 0.3)$	$1 - 2\nu = 0.4 \quad (\nu = 0.3)$
max	2	0
L_{def}	$\sqrt{2(1 + \nu)} \approx 1.61 \quad (\nu = 0.3)$	$\sqrt{3(1 - 2\nu)} \approx 1.1 \quad (\nu = 0.3)$
L_{dist}	$\sqrt{3} \approx 1.73$	0

Tabella 2.1.6.1

L'ultimo disegno presenta un confronto tra le varie teorie : tale rappresentazione è detta di Westergaard. Si è raffigurato uno stato piano e non uno tridimensionale, per le difficoltà che la rappresentazione di una situazione tensionale triassiale comporterebbe. Per uno stato monodimensionale, tutte le teorie possiedono la stessa tensione critica. La teoria della max modificata distingue tra tensioni principali trattive, nocive, e tensioni principali compressive, non nocive. La teoria della max è stata rappresentata per $\nu = 0.3$. Non si è considerata la teoria del Lavoro di deformazione perché il suo comportamento è analogo alla teoria del Lavoro di distorsione, che però è molto più aderente ai risultati sperimentali.

Si noti che la teoria della max mostra un campo di resistenza (una punta) nell'intorno della zona $\sigma_1 = \sigma_2$ (diagonale principale) maggiore di quello che si incontra nella teoria della max o del L_{dist} . In tale zona la teoria della max è eccessivamente generosa perché indica una resistenza fittizia del materiale. Questo fatto tradisce una debolezza della teoria della max nel decidere sulla resistenza del materiale soggetto a stati tensionali caratterizzati da $\sigma_1 = \sigma_2$, e quindi se ne sconsiglia l'applicazione. La teoria del Lavoro di distorsione presenta un contorno del campo di resistenza che è differenziabile, mentre le altre teorie presentano dei punti angolosi. Questa differenziabilità è considerata dagli specialisti del settore un argomento a favore della correttezza matematica di questa teoria. Il confronto finale di Figura 2.1.6.2 mostra che le teorie della max e del L_{dist} delimitano campi di resistenza molto simili, per cui queste due teorie vengono impiegate quasi intercambiabilmente nella pratica ingegneristica.

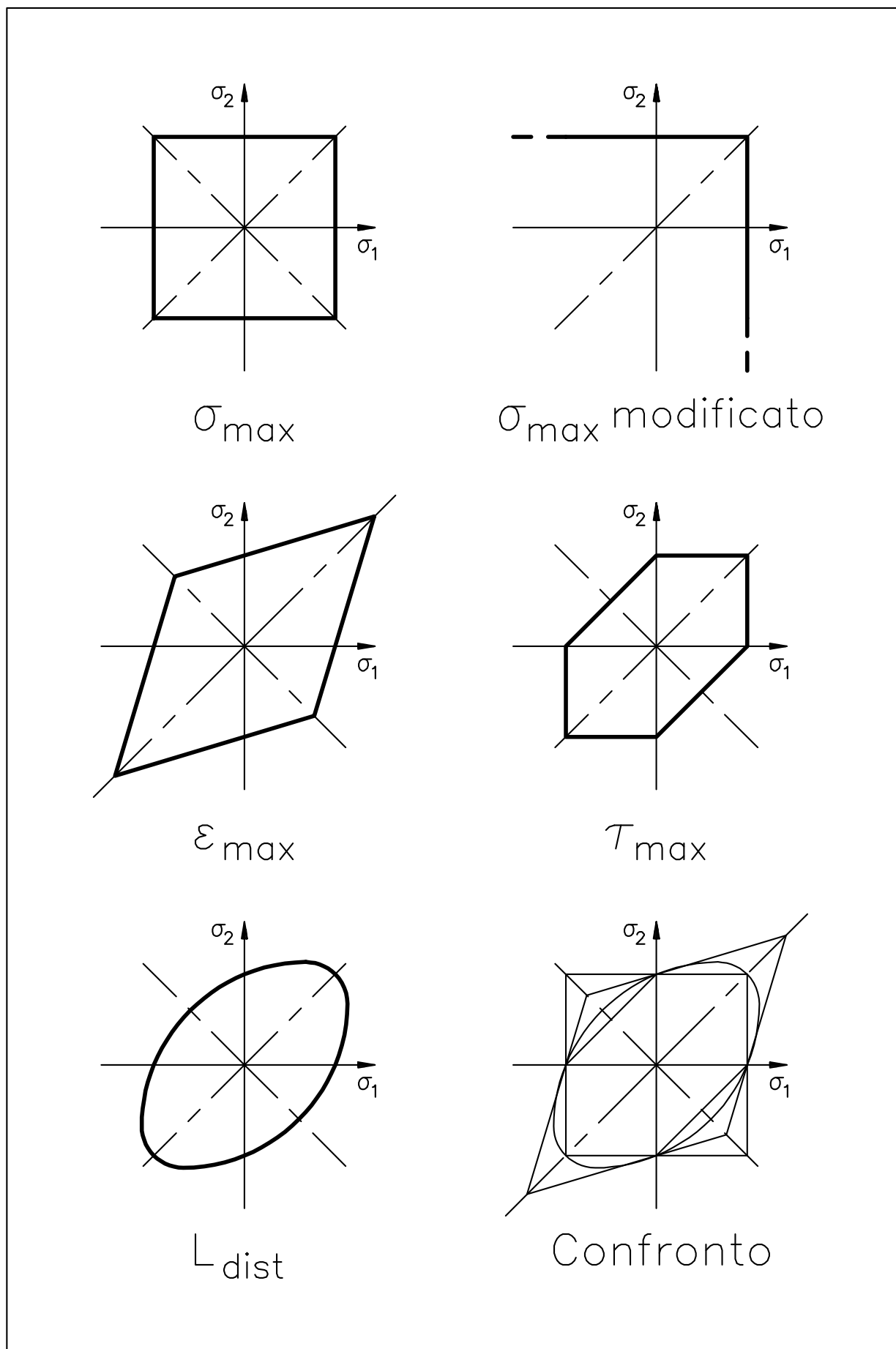


Figura 2.1.6.2

Error! Bookmark not defined.

Diagramma di Westergaard per una ghisa: punti sperimentali

FRACTURE CRITERIA FOR CAST IRON UNDER BIAXIAL STRESSES

W. M. MAIR *National Engineering Laboratory, East Kilbride, Glasgow*

JOURNAL OF STRAIN ANALYSIS VOL 3 NO 4 1968

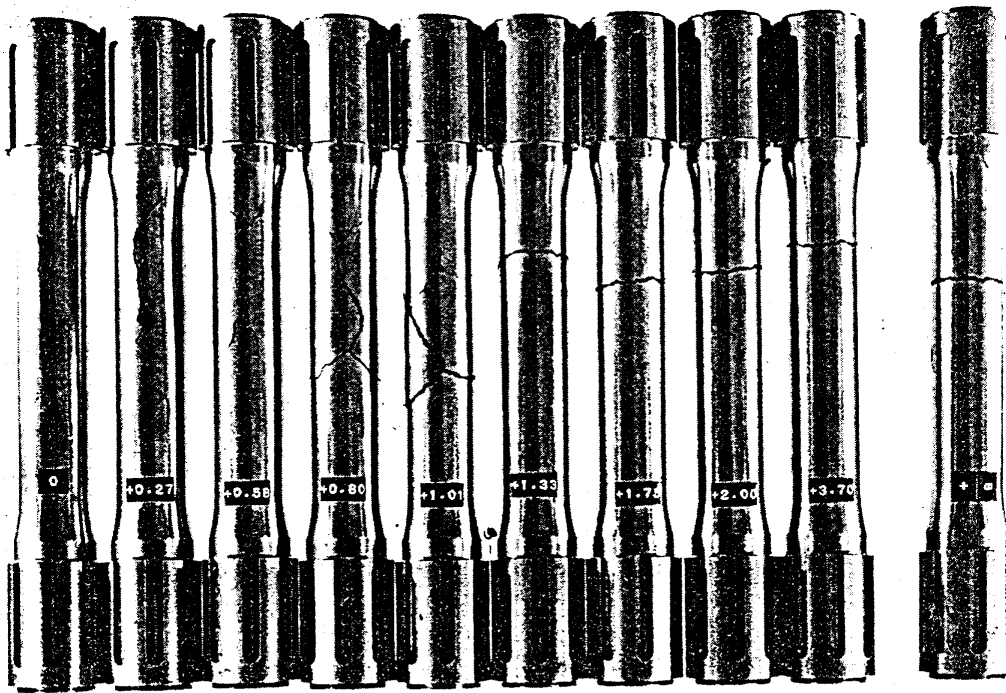


Fig. 6. Physical fracture planes, biaxial tension

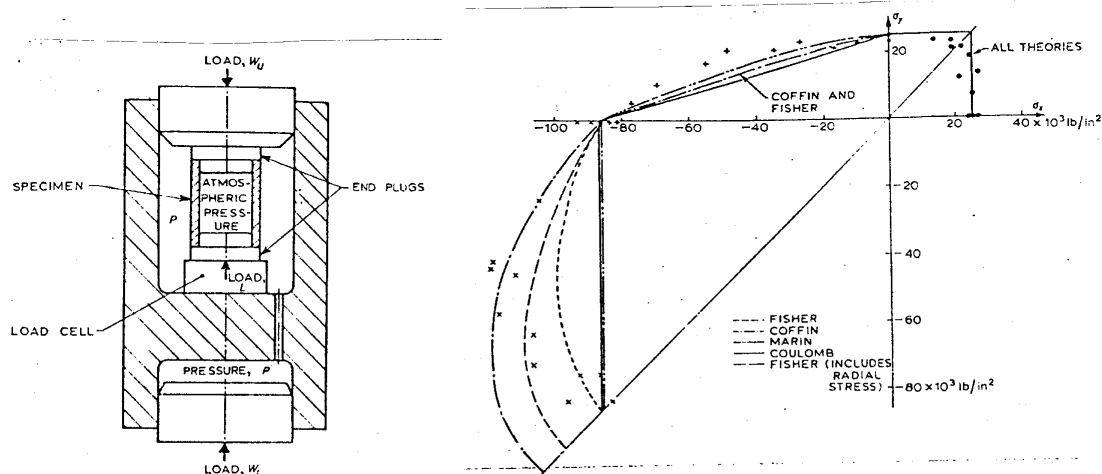


Fig. 11. Comparison of theories

Figura 2.1.6.3

Error! Bookmark not defined.

2.1.7 Confronto tra la tensione ideale secondo Mohr e secondo Von Mises in casi piani

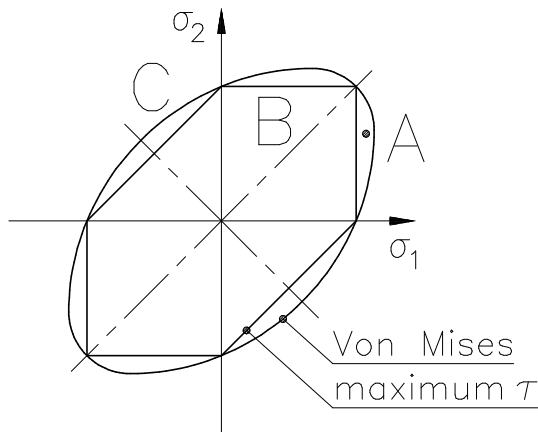


Figura 2.1.7.1

La Figura 2.1.7.1 mostra la rappresentazione di Westergaard in tensione piana della tensione ideale secondo Von Mises e secondo la tensione tangenziale massima. Si osserva subito che la coppia (σ_1, σ_2) che definisce il punto A rappresenta uno stato tensionale interno al contorno secondo Von Mises ma esterno al contorno secondo Mohr. Di conseguenza, lo stato tensionale

rappresentato dal punto A produce collasso secondo la teoria di Tresca, mentre è in sicurezza rispetto al criterio di Von Mises. Si conclude quindi che **la teoria della tensione tangenziale massima produce in casi piani una tensione ideale maggiore od uguale a quella di Von Mises.**

Nel seguito si analizza l'errore relativo massimo tra le due formulazioni di tensione ideale. Si considera una coppia di valori di tensioni (σ_1, σ_2) in vicinanza del punto B. Di conseguenza $\sigma_2 \geq \sigma_1 > 0$. La tensione ideale secondo Von Mises è

$$\sigma_{eq, VonMises} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (2.1.7.1)$$

mentre la tensione ideale secondo Mohr vale

$$\sigma_{id, \tau \text{ massima}} = \sigma_2 \quad (2.1.7.2)$$

Ricordando che $\sigma_{id, \tau \text{ massima}} \geq \sigma_{id, Von Mises}$, l'errore relativo E_B , calcolato come differenza tra le due tensioni ideali precedenti rapportata alla tensione ideale secondo Von Mises, è

$$E_B = \frac{\sigma_2 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}} \quad (2.1.7.3)$$

Introducendo la variabile adimensionale $x = \sigma_1/\sigma_2$, l'errore relativo E_B diventa

$$E_B = \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} - x}{\sqrt{1 + x^2} - x} \quad (2.1.7.4)$$

La derivata prima di E_B si annulla per $x = 0.5$, valore per il quale $E_B \approx 0.1547$.

Si considera ora una coppia (σ_1, σ_2) in vicinanza del punto C . Conseguentemente $\sigma_2 \geq 0$ mentre $\sigma_1 \leq 0$. La tensione ideale secondo Von Mises è espressa dalla (2.1.7.1), mentre la tensione ideale secondo Mohr vale

$$\sigma_{id, \tau \text{ massima}} = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (2.1.7.5)$$

L'errore relativo E_C tra le due tensioni ideali precedenti vale

$$E_C = \frac{\sigma_2 - \sigma_1 - \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} - \sigma_1 \sigma_2} = \frac{1 - x - \sqrt{1 + x^2} - x}{\sqrt{1 + x^2} - x} \quad (2.1.7.6)$$

La derivata prima di E_C si annulla per $x = -1$, valore per il quale $E_C \approx 0.1547$. In seguito alla simmetria, gli stessi risultati valgono anche per le altre zone del piano σ_1, σ_2 . Si conclude che **l'errore relativo massimo tra le due tensioni ideali in stato piano di tensione è circa il 15 per cento**. Le calcolazioni precedenti mostrano anche che il massimo errore tra le tensioni ideali secondo Tresca e Von Mises si verifica o quando si è in presenza di uno stato di taglio puro, cioè $\sigma_1 = -\sigma_2$, oppure quando $\sigma_1 = 2\sigma_2$ o $\sigma_2 = 2\sigma_1$.

2.2 Teorie del collasso per carichi affaticanti

Si consideri l'acciaio C40 . La tensione di snervamento a flessione vale 430 MPa , mentre quella a torsione vale 220 MPa . Il rapporto tra queste due tensioni critiche statiche vale 1.95 , cioè questi due dati sperimentali stanno quasi esattamente nel rapporto σ_{cr}/τ_{cr} implicito nella teoria della tensione ideale secondo la σ_{max} ($\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 2$) o secondo il L_{dist} ($\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 3 \cdot 1.73$) .

Si considerano ora tensioni non più statiche, ma affaticanti. I diagrammi di Goodman, che sono relativi a stati tensionali monodimensionali affaticanti, mostrano che i cicli all'inversione sono più nocivi dei cicli all'origine, ed anzi che i cicli all'inversione sono i più dannosi. Per tensioni affaticanti non vale quindi più in generale l'indicazione che la σ_{crit} è circa il doppio della τ_{crit} , perché questo rapporto dipende fortemente dai tipi di cicli della σ e della τ . Per esempio, per il C40 , se la σ è flessionale all'inversione, e la τ è statica, la criticità della σ vale 280 MPa , mentre la criticità della τ vale 220 MPa . Il rapporto tra le due tensioni critiche a σ ed a τ è circa 1.3 , ed è quindi nettamente inferiore al rapporto di circa 2 tra le due tensioni critiche a σ ed a τ nel caso di tensioni entrambi statiche. Nel caso affaticante, il fatto che la σ è soggetta al ciclo più dannoso, quello all'inversione, mentre la τ è statica e quindi segue il ciclo affaticante meno dannoso, compensa quasi completamente il dato valido per tensioni statiche $\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 2$, abbassando la τ_{cr} fino ad un valore tale che il rapporto σ_{cr}/τ_{cr} diventa poco più che l'unità , e circa 1.3 .

Da queste osservazioni introduttive emerge che, nei casi affaticanti, non possono più essere valide formule delle tensioni ideali quali la :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \quad (2.2.1)$$

che segue la teoria del L_{dist} , ed è valida per uno stato tensionale piano incompleto e statico. Infatti una formula come la (2.2.1) contiene implicitamente il fatto che la τ va moltiplicata per 3 per poter essere "sommata" alla σ (in realtà si sommano i quadrati delle tensioni, e si calcola poi la radice quadrata). Per tensioni affaticanti, questo peso moltiplicativo va adeguato ai cicli di fatica di σ e di τ , e ci si aspetta che valga circa 1.3² 1.7 se la σ è all'inversione e la τ è statica.

2.2.1 Si possono impiegare le espressioni delle tensioni ideali per carichi statici ai casi di sollecitazioni affaticanti?

Si potrebbe sperare che, per ottenere un ciclo affaticante monodimensionale che fosse equivalente al ciclo affaticante pluridimensionale da indagare, bastasse filmare il componente meccanico mentre esso viene sottoposto al caricamento affaticante, e valutare per ogni fotogramma, in un punto del componente di interesse, la tensione ideale tramite le teorie statiche. Si otterrebbe così un ciclo affaticante monodimensionale col quale si potrebbe entrare nel diagramma di Goodman, valutando così la resistenza a fatica del componente ed anche il

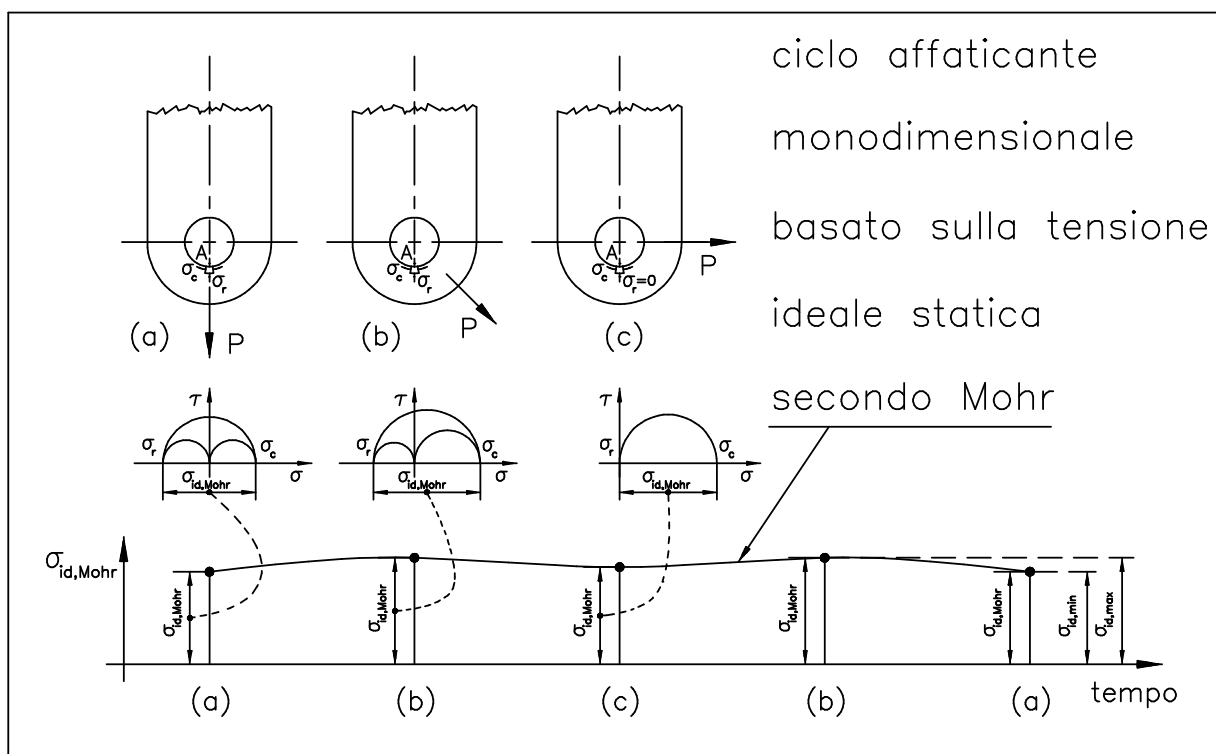


Figura 2.2.1.1

coefficiente di sicurezza, qualora il tipo di esplosione dei cicli di fatica fosse noto. La Figura 2.2.1.1 illustra con un esempio questa procedura. Si considera un collegamento a forcella e spinotto (si veda il relativo Capitolo), e si esaminano le tensioni nel punto A della forcella nella zona di contatto con lo spinotto mentre il carico P , ruotando di 90° , produce uno stato affaticante nelle tensioni. Si assume uno stato piano delle tensioni nel punto A. Vengono rappresentati i piani di Mohr per le tre posizioni (a), (b), (c) del carico P (i risultati riportati in termini delle tensioni principali 1 e 2 sono qualitativi), e viene calcolata la tensione ideale statica per esempio secondo Mohr, relativa ad una successione del carico (a), (b), (c), (b), (a), e cioè ad un carico che ruota fino a 90° per poi ritornare alla posizione iniziale, e così via. Tale tensione ideale viene quindi riportata in un

Error! Bookmark not defined.

diagramma tensione-tempo, ottenendo un ciclo monodimensionale affaticante definito dalle tensioni ideali massima e minima, che costituiscono le variabili di ingresso nel diagramma di Goodman.

Sfortunatamente tale approccio, che si sposerebbe perfettamente con le potenzialità dei programmi agli Elementi Finiti nel calcolare la tensione ideale statica per ogni valore del carico, non produce risultati attendibili, e non deve quindi venire impiegato nella pratica ingegneristica. Per evidenziare la scorrettezza di questo approccio, si considera una biella caricata da una forza P che varia tra due valori opposti, Figura 2.2.1.2. Si considera un punto del fusto della biella, nel quale nasce una tensione significativa σ_1 , mentre la tensione σ_2 è trascurabile (ed infatti viene ignorata nei calcoli, si veda il Capitolo sulla Biella). Assumendo uno stato piano delle tensioni, riportando le tensioni sul piano di Mohr, e valutando la

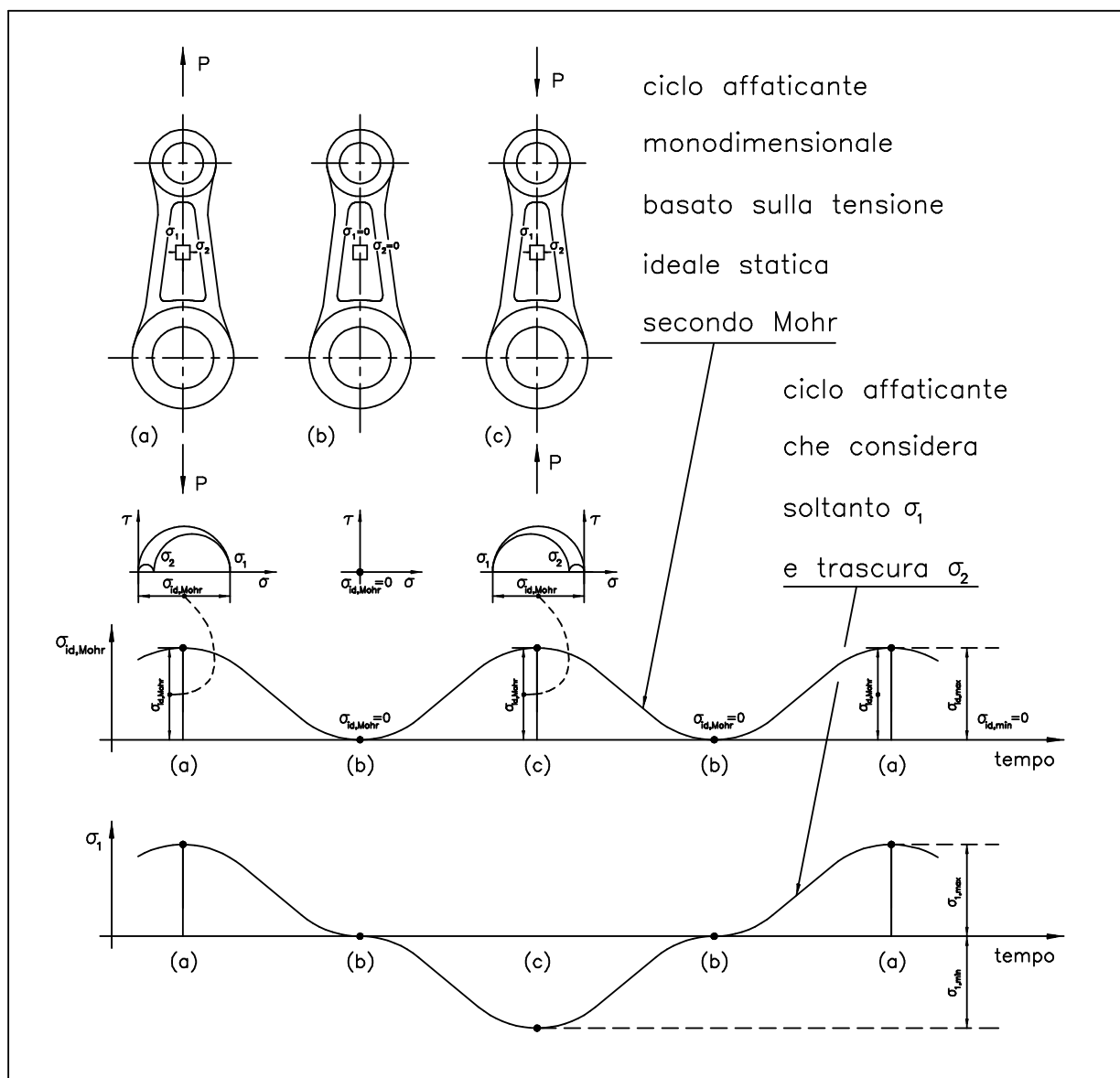


Figura 2.2.1.2

tensione ideale per esempio secondo Mohr, si ottiene un ciclo affaticante monodimensionale **all'origine**. Se invece si osserva che la tensione σ_2 , essendo bassa, può venire trascurata nei calcoli, si ottiene per la sola tensione σ_1 un ciclo di fatica **all'inversione**. L'impiego della tensione ideale statica in questo problema affaticante snatura il carattere reale del ciclo di fatica, tramutandolo fittiziamente da un ciclo all'inversione ad un ciclo all'origine. La causa di questo risultato scorretto risiede essenzialmente nel fatto che la tensione ideale statica è positiva o nulla, ma non può mai diventare negativa. Quindi un ciclo alterno asimmetrico viene tramutato dalla tensione ideale statica in un ciclo pulsante o al più all'origine, il quale risulta molto meno pericoloso del ciclo affaticante reale.

Queste osservazioni critiche testimoniano la necessità di sviluppare formule della tensione ideale per i casi affaticanti che non soffrano delle limitazioni qui evidenziate. In particolare, le formule per i casi affaticanti devono passare il seguente controllo: se il ciclo diventa monodimensionale ed all'inversione, la formula deve esprimere questo stato di fatica e non deve snaturarlo.

Esistono però delle situazioni affaticanti nelle quali risulta corretto impiegare le espressioni delle tensioni ideali per tensioni statiche, anche se impiegando una procedura diversa da quella appena illustrata. Tali casi sono quelli nei quali **i cicli di fatica di tutte le tensioni sono gli stessi, per esempio tutti all'origine o tutti all'inversione**. Infatti in questo caso le tensioni critiche affaticanti scalano più o meno nella stessa proporzione rispetto alle tensioni statiche, e ciò è legato anche al fatto che i diagrammi di Goodman di σ e di τ sono sostanzialmente proporzionali. L'impiego corretto di formule statiche anche in casi affaticanti è tuttavia profondamente diverso da quello illustrato nelle Figure 2.2.1.1 e 2.2.1.2. L'uso corretto impone di calcolare con le formule delle tensioni ideali per carichi statici soltanto la tensione ideale superiore (e non anche la inferiore, come invece illustrato nelle Figure precedenti), introducendo quindi nelle formule soltanto i valori delle tensioni superiori delle varie sollecitazioni, recuperando poi la nozione di ciclo all'origine od all'inversione col paragonare tale tensione ideale alla tensione critica corrispondente al tipo di ciclo di fatica comune a tutte le componenti delle tensioni. Se per esempio si considera uno stato di sollecitazione bidimensionale incompleto, dove $\sigma_x = 30$ MPa e $\tau_{xy} = 15$ MPa e le tensioni sono entrambe all'inversione, allora:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{30^2 + 3 \times 15^2} = 39.69 \text{ MPa} \quad (2.2.1.1)$$

mentre, se si considera il C40, il coefficiente di sicurezza n vale, ipotizzando una esplosione a ventaglio:

$$n = \frac{280}{39.69} = 7.06 \quad (2.2.1.2)$$

Quindi la nozione che i cicli tensionali sono all'inversione viene recuperata impiegando la tensione critica all'inversione di 280 MPa e non una tensione statica di 430 MPa od una tensione critica all'origine.

2.2.2 Teorie del collasso per stati tensionali affaticanti piani

Aderendo alle considerazioni svolte nel Paragrafo 2.2 , si sviluppa nel seguito una formula della tensione ideale secondo il Lavoro di distorsione, per uno stato tensionale piano incompleto. Si parte dalla (2.1.5.12) , valida per tensioni statiche :

$$\begin{aligned}\sigma_{id}|_{L_{dist}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sigma_{cr} \Rightarrow \sigma^2 + 3 \tau^2 = \sigma_{cr}^2 \Rightarrow \\ \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{3}}}\right)^2 &= 1 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = 1\end{aligned}\quad (2.2.2.1)$$

dove si è sfruttato il fatto che, secondo la teoria del L_{dist} , $\sigma_{cr}/\tau_{cr} = \sqrt{3}$.

L'ultima espressione delle (2.2.2.1) è soltanto una elaborazione della (2.1.5.12) , e come tale è applicabile a stati tensionali statici. Tuttavia questa espressione, riscritta nella forma (2.2.2.2) , può essere ragionevolmente applicata anche a stati tensionali affaticanti piani incompleti, purché a σ_{cr} e τ_{cr} vengano assegnati i valori estratti dal diagramma di Goodman. Per esempio, se è flessionale all'inversione, $\sigma_{cr} = 280$ MPa , e se è statico, $\tau_{cr} = 220$ MPa . I risultati sperimentali confermano che questo impiego della formula (2.2.2.2) a stati tensionali piani incompleti affaticanti produce risultati abbastanza corretti.

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (2.2.2.2)$$

Se si segue lo stesso schema di ragionamento partendo dalla formula della tensione ideale secondo la τ_{max} (e non più secondo il L_{dist}) per uno stato tensionale piano incompleto, si arriva ad una formula identica alla (2.2.2.2) . Si parte dalla :

$$\sigma_{id}|_{\tau_{max}} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \quad (2.2.2.3)$$

Seguendo il procedimento impiegato per la (2.2.2.1) , si ottiene :

$$\sigma_{id}|_{\tau_{max}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_{cr} \Rightarrow \sigma^2 + 4\tau^2 = \sigma_{cr}^2 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\frac{\sigma_{cr}}{2}}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (2.2.2.4)$$

dove si è sfruttato il fatto che, secondo la teoria della max , $\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 2$. Le espressioni (2.2.2.5) sono variazioni della (2.2.2.4). La prima espressione permette il calcolo del coefficiente di sicurezza n , mentre la seconda espressione permette di verificare la resistenza a fatica di un organo.

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad ; \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_{amm}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{amm}}\right)^2 \leq 1 \quad (2.2.2.5)$$

Si noti che la (2.2.2.4) non presenta la forma canonica $id =$ espressione, ma è formata da somme di quadrati di rapporti, confrontate con l'unità. Questo è infatti l'aspetto tipico delle formule di verifica di resistenza in fatica. Nel Paragrafo 2.2.3 si ricaveranno tuttavia, elaborando le formule canoniche della tensione ideale in fatica, espressioni nella forma canonica $id =$ espressione. Si veda per esempio l'espressione (2.2.3.10).

Si incontrano anche nella pratica ingegneristica stati tensionali piani incompleti nei quali la tensione è dovuta in parte alla flessione ed in parte allo sforzo normale. Per esempio, in un albero di trasmissione può essere simultaneamente presente una M_f all'inversione, dovuta alla rotazione dell'albero, ed una N statica, dovuta al precarico dei cuscinetti. In questi casi si può impiegare la seguente formula empirica:

$$\sigma = \sigma_{Mf} + \sigma_N$$

$$\left(\frac{\sigma_{Mf}}{\sigma_{Mf,cr}} + \frac{\sigma_N}{\sigma_{N,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 \leq 1 \quad (2.2.2.6)$$

dove $M_{f,cr}$ sarà la tensione critica all'inversione, mentre $N_{,cr}$ sarà lo snervamento. Se però $M_f \gg N$, allora la (2.2.2.6) degenera nella:

$$\left(\frac{\sigma_{Mf} + \sigma_N}{\sigma_{Mf,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 \leq 1 \quad (2.2.2.7)$$

dove al denominatore della frazione di sinistra ci si riferisce a Mf,cr perché la tensione flessionale è prevalente su quella di sforzo normale. Nella determinazione della Mf,cr occorre riferirsi al ciclo delle tensioni somma di Mf e di N , impiegando le tecniche di esplosione del ciclo di fatica analizzate nel Capitolo sulla Fatica.

La stessa tecnica impiegata per derivare la formula (2.2.2.2) può essere applicata a stati tensionali piani completi. Si considera per esempio l'espressione della tensione ideale secondo il Lavoro di distorsione per uno stato tensionale statico piano completo :

$$\begin{aligned} \sigma_{id} &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} = \sigma_{cr} \Rightarrow \\ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 &= \sigma_{cr}^2 \Rightarrow \\ \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{cr}^2} \right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{cr}}{\sqrt{3}}} \right)^2 &= 1 \Rightarrow \\ \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr}} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{cr}^2} \right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{cr}} \right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.2.8)$$

dove si è sfruttato il fatto che, secondo la teoria del L_{dist} , $\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 3$.

L'ultima espressione delle (2.2.2.8) è soltanto una elaborazione della (2.1.5.15), e come tale è applicabile a stati tensionali statici piani completi. Tuttavia tale espressione può essere ragionevolmente applicata anche a stati tensionali affaticanti piani completi, purché a σ_{cr} e τ_{cr} vengano assegnati i valori estratti dal diagramma di Goodman. Per questo è conveniente riscrivere l'ultima delle (2.2.2.8) nel modo seguente, che distingue tra $\sigma_{cr,x}$ e $\sigma_{cr,y}$, dato che $\sigma_{cr,x}$ può per esempio essere all'origine e $\sigma_{cr,y}$ all'inversione :

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr,x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr,y}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{cr,x} \sigma_{cr,y}}\right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{cr}}\right)^2 = 1 \quad (2.2.2.9)$$

Le espressioni (2.2.2.10) sono variazioni della (2.2.2.9) . La prima espressione permette il calcolo del coefficiente di sicurezza n , mentre la seconda espressione consente di verificare se un organo è in sicurezza.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr,x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr,y}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{cr,x} \sigma_{cr,y}}\right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{cr}}\right)^2 &= \frac{1}{n^2} \\ \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{amm,x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{amm,y}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{amm,x} \sigma_{amm,y}}\right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{amm}}\right)^2 &\leq 1 \end{aligned} \quad (2.2.2.10)$$

Se τ_{xy} si annulla, σ_x diventa tensione principale, per esempio σ_1 , mentre σ_y diventa σ_2 . La (2.2.2.10) diventa, per uno stato affaticante piano e riferito alle tensioni principali :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cr,1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{cr,2}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{cr,1} \sigma_{cr,2}}\right) = 1 \quad (2.2.2.11)$$

Le espressioni (2.2.2.12) sono variazioni della (2.2.2.11) . La prima espressione permette il calcolo del coefficiente di sicurezza n , mentre la seconda espressione permette di verificare se un organo è in sicurezza.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cr,1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{cr,2}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{cr,1} \sigma_{cr,2}}\right) &= \frac{1}{n^2} \\ \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{amm,1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{amm,2}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{amm,1} \sigma_{amm,2}}\right) &\leq 1 \end{aligned} \quad (2.2.2.12)$$

Le varie formule delle tensioni ideali per tensioni affaticanti in stato piano sono raggruppate nella Tabella 3.3 .

Error! Bookmark not defined.

2.2.3 Teorie del collasso per stati tensionali affaticanti triassiali

Si esaminano ora gli stati tensionali affaticanti tridimensionali. Si considerano soltanto cicli in cui tutte le tensioni sono sincrone ed in fase od in controfase, in cui cioè i massimi ed i minimi delle onde delle varie tensioni raggiungono i massimi ed i minimi simultaneamente.

Si potrebbe facilmente estendere le formule sviluppate per gli stati piani alle situazioni tridimensionali. Per esempio, la formula (2.2.2.11) potrebbe venire generalizzata al caso triassiale come:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{cr,1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{cr,2}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_3}{\sigma_{cr,3}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{cr,1} \sigma_{cr,2}}\right) - \left(\frac{\sigma_2 \sigma_3}{\sigma_{cr,2} \sigma_{cr,3}}\right) - \left(\frac{\sigma_3 \sigma_1}{\sigma_{cr,3} \sigma_{cr,1}}\right) = 1 \quad (2.2.3.1)$$

Tuttavia per gli stati affaticanti triassiali non sono disponibili sufficienti dati sperimentali da poter sviluppare una teoria della tensione ideale veramente affidabile. Per lo stato tridimensionale affaticante, si è preferito quindi seguire un approccio diverso da quello impiegato per stati piani, e sostanzialmente in sicurezza rispetto alla (2.2.3.1) (si veda il Paragrafo 2.2.4). Tale approccio viene presentato nel seguito.

Si considera dapprima uno stato triassiale riferito alle direzioni principali. In pratica si adotta soltanto la teoria del Lavoro di distorsione. Ognuna delle tre tensioni principali è scomposta nel suo valore medio, m , e nel suo valore alterno, a . Mentre il segno di m risulta dai calcoli e non presenta quindi incertezze, il segno da attribuire a a richiede attenzioni considerate più avanti. Si calcola poi la tensione ideale secondo il Lavoro di distorsione delle tre componenti medie delle tensioni principali, e similmente si calcola la tensione ideale, sempre secondo il Lavoro di distorsione, delle tre componenti alterne delle tensioni principali. Si ricostruisce così un ciclo affaticante monodimensionale la cui parte media è la tensione ideale delle tre componenti medie delle tensioni principali dello stato tridimensionale, mentre la parte alterna è la tensione ideale delle tre componenti alterne delle tensioni principali dello stato tridimensionale. La verifica di resistenza va effettuata considerando questo ciclo affaticante monodimensionale equivalente. La (2.2.3.2) illustra le formule per il calcolo della tensione ideale delle componenti medie ed alterne.

$$\begin{aligned}
\sigma_{1,2,3} &= \sigma_{1,2,3,m} + \sigma_{1,2,3,a} \\
\sigma_{id,m} &= \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 + \sigma_{3,m}^2 - (\sigma_{1,m}\sigma_{2,m} + \sigma_{2,m}\sigma_{3,m} + \sigma_{3,m}\sigma_{1,m})} \\
\sigma_{id,a} &= \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 + \sigma_{3,a}^2 - (\sigma_{1,a}\sigma_{2,a} + \sigma_{2,a}\sigma_{3,a} + \sigma_{3,a}\sigma_{1,a})} \\
\sigma_{id} &= \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}
\end{aligned}
\tag{2.2.3.2}$$

Se il cubetto non è orientato secondo le direzioni principali, si procede in modo simile, considerando le sei componenti tensionali indipendenti formate da tre e da tre , spezzando le sei tensioni nelle componenti medie ed alterne, e poi calcolando la tensione ideale secondo il Lavoro di distorsione delle parti medie e delle parti alterne, ottenendo ancora un ciclo affaticante monodimensionale equivalente. Non esistono problemi di convenzioni sui segni delle , dato che le compaiono al quadrato nelle formule della tensione ideale secondo il Lavoro di distorsione. La (2.2.3.3) illustra le formule per il calcolo della tensione ideale delle componenti medie ed alterne.

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,y,z} &= \sigma_{x,y,z,m} + \sigma_{x,y,z,a} \\
\tau_{xy,yz,zx} &= \tau_{xy,yz,zx,m} + \tau_{xy,yz,zx,a} \\
\sigma_{id,m} &= \sqrt{\sigma_{x,m}^2 + \sigma_{y,m}^2 + \sigma_{z,m}^2 - (\sigma_{x,m}\sigma_{y,m} + \sigma_{y,m}\sigma_{z,m} + \sigma_{z,m}\sigma_{x,m}) + 3(\tau_{xy,m}^2 + \tau_{yz,m}^2 + \tau_{zx,m}^2)} \\
\sigma_{id,a} &= \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \sigma_{y,a}^2 + \sigma_{z,a}^2 - (\sigma_{x,a}\sigma_{y,a} + \sigma_{y,a}\sigma_{z,a} + \sigma_{z,a}\sigma_{x,a}) + 3(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2)} \\
\sigma_{id} &= \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}
\end{aligned}
\tag{2.2.3.3}$$

Si considera ora il segno da attribuire alle parti alterne a delle tensioni normali. Il segno da attribuire alle a è un segno relativo, nel senso che, se si inverte la convenzione, non cambia il valore della tensione ideale delle componenti alterne, dato che nelle formule, relativamente alla , compaiono solamente quadrati e prodotti del tipo $x \cdot y$. In Figura 2.2.3.1 si presentano tre cicli affaticanti per le tre tensioni principali σ_1 , σ_2 , σ_3 . I cicli della σ_1 e della σ_3 sono tra loro in fase, mentre il ciclo della σ_2 è in controfase.

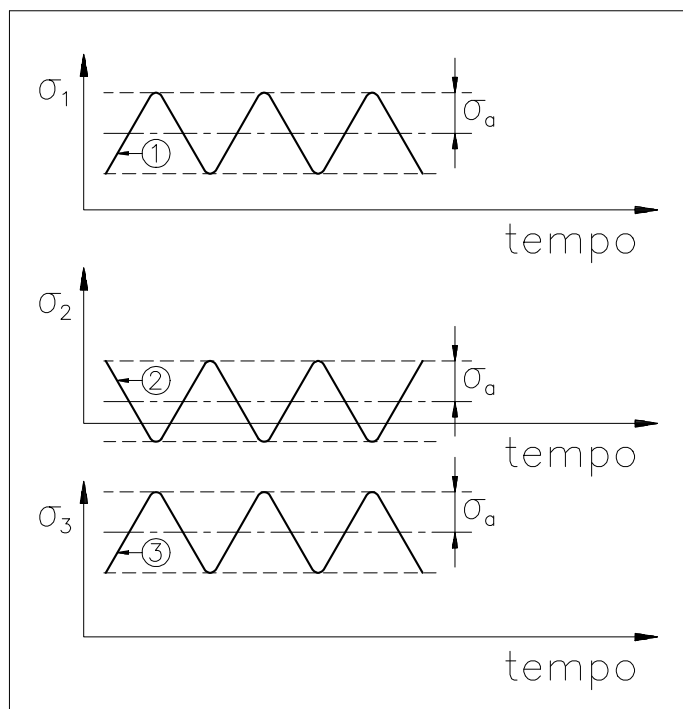


Figura 2.2.3.1

tensioni ideali per tensioni affaticanti e stato tensionale triassiale sono raggruppate nella Tabella 3.4 . Gli esempi numerici del Paragrafo 4 chiariranno sperabilmente eventuali dubbi.

Si esamini il ramo iniziale delle tre curve delle tensioni. Mentre la tensione σ_1 aumenta (ramo (1)), la σ_2 cala (ramo (2)), e la σ_3 cresce (ramo (3)). Occorre quindi attribuire un segno, per esempio positivo, alle componenti alterne delle tensioni che crescono, quindi alle a della 1 e della 3, ed un segno negativo alla a della 2. Come già notato, la convenzione opposta non modifica il valore della tensione ideale delle componenti alterne delle tre tensioni principali.

Le varie formule delle

2.2.4 Confronti tra la tensione ideale affaticante piana e triassiale

Si è già notato che l'approccio seguito per ottenere formule della tensione ideale per stati tensionali bidimensionali è diverso da quello impiegato in stati tensionali tridimensionali. Ci si pone la seguente domanda : se applico l'approccio valido per uno stato tensionale tridimensionale ad uno stato tensionale piano, ottengo risultati coerenti con le formule della tensione ideale valide per stati tensionali piani ? Sarebbe infatti desiderabile che l'approccio tridimensionale, se impiegato in stati piani, producesse le stesse formule della tensione ideale valide per stati piani.

Si considera per semplicità uno stato piano incompleto, seguendo la teoria del Lavoro di distorsione . La relazione di criticità tra σ e τ è :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = 1 \quad (2.2.4.1)$$

Per uno stato tensionale tridimensionale invece si calcola la σ_{id} come somma di due contributi :

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \tau_m^2} \quad ; \quad \sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2} \quad (2.2.4.2)$$
$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}$$

Si effettuano due diversi confronti tra la formula piana (2D) e quella triassiale applicata ad uno stato piano (3D) :

- 1) caso in cui σ e τ seguono lo stesso tipo di ciclo di fatica (per esempio all'origine o all'inversione) ;
- 2) caso in cui σ segue un ciclo all'inversione mentre τ è statica (caso tipico di un albero di trasmissione) .

Si esamina dapprima il caso 1) , in cui σ e τ seguono lo stesso tipo di ciclo di fatica. Si applicano le formule 2D e 3D a tale stato piano. Si noti che la formula 2D è tipica di uno stato piano incompleto statico e non affaticante. Tuttavia, dato che σ e τ seguono lo stesso tipo di ciclo di fatica, è corretto impiegare formule della tensione ideale valide per tensioni statiche. Si ottiene :

$$\begin{aligned}
2D \quad \rightarrow \quad \sigma_{id} &= \sqrt{\sigma_{sup}^2 + 3 \tau_{sup}^2} = \sqrt{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3 (\tau_m + \tau_a)^2} \\
3D \quad \rightarrow \quad \sigma_{id} &= \sigma_{id,m} + \sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \tau_m^2} + \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2}
\end{aligned}
\tag{2.2.4.3}$$

Si considera ora la disuguaglianza di Minkowski, utile nel paragone tra le formule 2D e 3D :

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i \pm y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p \right)^{1/p}
\tag{2.2.4.4}$$

Ponendo $n = 2$, $p = 2$, la disuguaglianza di Minkowski assume la forma :

$$\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2}
\tag{2.2.4.5}$$

Identificando le variabili della (2.2.3.5) nel modo seguente :

$$x_1 = \sigma_m \quad ; \quad x_2 = \sqrt{3} \tau_m \quad ; \quad y_1 = \sigma_a \quad ; \quad y_2 = \sqrt{3} \tau_a
\tag{2.2.4.6}$$

la disuguaglianza di Minkowski viene infine riscritta come :

$$\sqrt{(\sigma_m + \sigma_a)^2 + 3 (\tau_m + \tau_a)^2} \leq \sqrt{\sigma_m^2 + 3 \tau_m^2} + \sqrt{\sigma_a^2 + 3 \tau_a^2}
\tag{2.2.4.7}$$

un risultato che dimostra che :

$$\sigma_{id,2D} \leq \sigma_{id,3D}
\tag{2.2.4.8}$$

In conclusione, per uno stato tensionale piano incompleto affaticante, con gli stessi cicli di fatica per σ e per τ , la tensione ideale secondo l'approccio tridimensionale sovrastima la tensione ideale secondo l'approccio bidimensionale, e quindi è cautelativa in termini di sicurezza. Questo risultato esprime la sostanziale diversità tra i due approcci 2D e 3D

Error! Bookmark not defined.

. Le formule 3D , se confrontate coi dati sperimentali, risultano meno precise, anche se cautelative (cioè errate in eccesso), di quelle 2D , e quindi vanno impiegate soltanto in stati effettivamente triassiali, per i quali una estensione dell'approccio 2D non è stata sviluppata.

Si esamina ora il caso 2) , in cui la segue un ciclo all'inversione mentre la è statica. Questo caso è tipico di un albero di trasmissione, dove la , flessionale, è all'inversione, mentre la , torsionale, è statica. Si applica la formula 2D a tale stato piano :

$$2D \rightarrow \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 \tau^2 = \sigma_{cr}^2 = \sigma_{id}^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 \tau^2}$$

(2.2.4.9)

dove si è posto $\sigma_{cr} = \sigma_{id}$, dato che σ_{cr} si riferisce ad uno stato monodimensionale. Si noti che la (2.2.4.9) possiede la forma canonica $\sigma_{id} =$ espressione, mentre nel Paragrafo 2.2.2 si erano incontrate formule di verifica di resistenza a fatica in cui somme di rapporti al quadrato erano confrontate con l'unità, per esempio la formula (2.2.2.2) .

Nel caso del C40 , $\sigma_{cr} = \sigma_{inv} = 280$ MPa , e $\tau_{cr} = \tau_{crs} = 220$ MPa , per cui $\sigma_{cr}/\tau_{cr} = 280/220 = 1.27$, come già discusso nel Paragrafo 2.2 , e $(\sigma_{cr}/\tau_{cr})^2 = (280/220)^2 = 1.62$. Si nota quindi che il peso dato alla tensione tangenziale varia a seconda dei due tipi di cicli di e . Se i due cicli sono uguali, per esempio statici, $(\sigma_{cr}/\tau_{cr})^2 = (R_s/\tau_s)^2 = (430/220)^2 = 3.82$, non troppo lontano dal numero 3 richiesto dalla teoria del Lavoro di distorsione. Con questi numeri, la tensione ideale diventa :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{280}{220} \right)^2 \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 1.27^2 \tau^2}$$

(2.2.4.10)

Si applicano ora le formule 3D a tale stato piano :

$$3D \quad \sigma_a = \sigma \quad ; \quad \tau_m = \tau \quad \rightarrow$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} + \sigma_{id,a} = \sqrt{3 \tau_m^2} + \sqrt{\sigma_a^2} = \sigma + \sqrt{3} \tau = \sigma + 1.73 \tau \quad (2.2.4.11)$$

Riassumendo, per uno stato piano incompleto affaticante con all'inversione e all'origine, le espressioni della tensione ideale in 2D ed in 3D sono :

$$2D \rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 1.27^2 \tau^2} \quad (2.2.4.12)$$

$$3D \rightarrow \sigma_{id} = \sigma + 1.73 \tau$$

Si possono confrontare le due formule 2D e 3D su un piano τ/σ_{id} σ/σ_{id} . A questo fine, le due formule vengono riscritte come :

$$2D \rightarrow \frac{\tau}{\sigma_{id}} = \frac{1}{1.27} \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{id}} \right)^2} = 0.79 \sqrt{1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_{id}} \right)^2}$$

$$3D \rightarrow \frac{\tau}{\sigma_{id}} = \frac{1}{1.73} \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{id}} \right) = 0.58 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_{id}} \right) \quad (2.2.4.13)$$

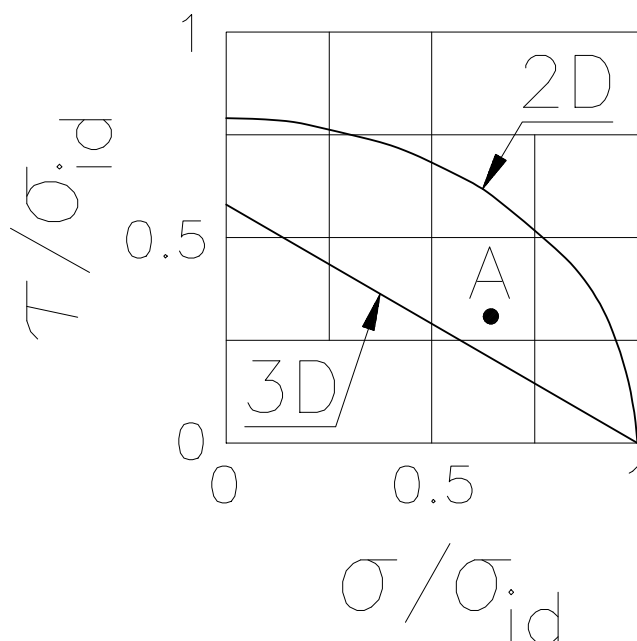


Figura 2.2.4.1

La Figura 2.2.4.1 mostra una rappresentazione grafica delle due curve 2D e 3D . Si nota che la curva 2D delimita una superficie maggiore di quella racchiusa dalla curva 3D . Il punto A risulta esterno al campo di resistenza della teoria 3D , per cui il materiale dovrebbe cedere secondo la teoria 3D . Invece il punto A è interno al campo di resistenza della teoria 2D , per cui il materiale dovrebbe resistere secondo la teoria 2D . In altre

parole, la teoria 3D , producendo un campo di resistenza più piccolo, è più conservativa, e quindi a favore della sicurezza. I dati sperimentali tuttavia mostrano una migliore corrispondenza con la curva 2D , mentre la curva 3D è eccessivamente conservativa. Per esempio, il confine 3D è lineare, in contrasto colla tendenza dei dati sperimentali a disporsi lungo una curva e non una retta

La conclusione dei due confronti tra espressioni bi- e tridimensionali della tensione ideale è che **le formule tridimensionali affaticanti della tensione ideale vanno impiegate soltanto per stati tensionali effettivamente triassiali, ed affaticanti con cicli di fatica diversi per le varie tensioni. Per stati tensionali piani affaticanti bisogna impiegare le formule della tensione ideale in fatica bidimensionale. Per stati tensionali triassiali affaticanti con cicli di fatica uguali per le tensioni bisogna usare le formule della tensione ideale tridimensionale statica, calcolando il valore della tensione critica per il tipo di ciclo di fatica agente.**

2.2.5 Sull'applicabilità di formule di tensione ideale statica in situazioni affaticanti piane

Nel Paragrafo 2.2.1 si è affermato che è possibile applicare, **per casi piani**, formule di tensione ideale statica a situazioni affaticanti purché i cicli di fatica di tutte le tensioni siano gli stessi, per esempio tutti all'origine o tutti all'inversione. Si analizzano nel seguito i fondamenti teorici di questa asserzione per chiarire l'applicabilità di formule ideali statiche in casi affaticanti. Si considera uno stato piano completo, nel quale intervengono le tre tensioni σ_x , σ_y , τ_{xy} . La formula per tensioni affaticanti è:

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{cr,x}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{cr,y}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{cr,x} \sigma_{cr,y}}\right) + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad (2.2.5.1)$$

Se invece si applica la formula per tensioni statiche, si scrive:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \quad (2.2.5.2)$$

Assumendo $\sigma_{cr,x} = \sigma_{cr,y}$, la (2.2.5.1) può essere riscritta come:

Error! Bookmark not defined.

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \left(\frac{\sigma_{cr}^2}{\tau_{cr}^2} \right) \tau_{xy}^2 = \frac{\sigma_{cr}^2}{n^2} \quad (2.2.5.3)$$

oppure anche come:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + \left(\frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}} \right)^2 \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \quad (2.2.5.4)$$

I diagrammi di Goodman vedono il contorno superiore delle σ più o meno di valore doppio rispetto a quello delle τ , a parità di tipo di ciclo di fatica. Per esempio, per un C40 la tensione σ di snervamento, rappresentativa della criticità all'origine, vale 430 MPa, mentre la tensione τ di snervamento vale 220 MPa. Similmente, la tensione σ di criticità all'inversione vale 280 MPa, mentre la tensione τ di criticità vale 160 MPa, non troppo distante dalla metà di 280. Se quindi i cicli di fatica delle tensioni sono tutti dello stesso tipo, $\sigma_{cr} / \tau_{cr} \approx 2$ e la formula (2.2.5.4), valida per tensioni affaticanti bidimensionali, diventa:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 4 \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_{cr}}{n} \quad (2.2.5.5)$$

che è molto simile alla formula (2.2.5.2) valida per tensioni statiche bidimensionali. Se σ_{cr} / τ_{cr} valesse $\sqrt{3} \approx 1.73$, la formula (2.2.5.4), valida per tensioni affaticanti, coinciderebbe perfettamente con la (2.2.5.2), valida per tensioni statiche. Questo esempio conferma che le formule per la tensione ideale statica bidimensionale possono venire impiegate in situazioni affaticanti se i cicli di fatica di tutte le tensioni sono dello stesso tipo. Operativamente, si calcola la tensione ideale statica, e la si paragona alla tensione σ di criticità affaticante relativa al tipo di ciclo delle tensioni, per esempio all'origine o all'inversione.

3 Raccolta di formule di tensioni ideali

La Tabella 3.1 raccoglie le espressioni delle tensioni ideali per le teorie della \max , \max , \max e per il L_{dist} , per vari stati di tensioni statiche, e precisamente per uno stato di tensione piana riferito alle tensioni principali, per uno stato piano (cioè di tensione piana) incompleto, e per uno stato piano completo. La Tabella 3.2 raggruppa le espressioni delle tensioni ideali per le teorie della \max , \max , \max e per il L_{dist} , per uno stato triassiale statico di tensione riferito alle tensioni principali e, per il solo caso del L_{dist} , per uno stato tensionale non principale statico. La Tabella 3.3 presenta le espressioni delle tensioni ideali per le teorie della \max , \max , \max e per il L_{dist} , per vari stati di tensioni affaticanti, e precisamente per uno stato di tensione piana riferito alle tensioni principali, per uno stato piano (cioè di tensione piana) incompleto, e per uno stato piano completo. Infine, la Tabella 3.4 mostra le espressioni delle tensioni ideali per la sola teoria del L_{dist} , e per uno stato triassiale affaticante di tensione riferito alle tensioni principali ed anche per uno stato tensionale non principale affaticante.

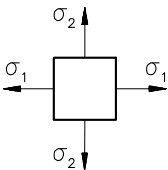
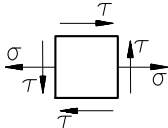
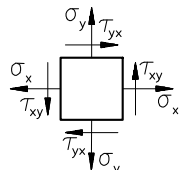
<p style="text-align: center;">TENSIONE IDEALE CARICHI STATICI - TENSIONE PIANA</p>			
TEORIA	 <p>tensioni principali</p>	 <p>stato piano incompleto</p>	 <p>stato piano completo</p>
max	$ \sigma_1 $ $ \sigma_2 $	$\left \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right $	$\left \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right $
max	$ \sigma_1 - \nu \sigma_2 $ $ \sigma_2 - \nu \sigma_1 $	$\left \frac{1-\nu}{2} \sigma \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} \right $	$\left \frac{1-\nu}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right $
max	$ \sigma_1 $ $ \sigma_2 $ $ \sigma_1 - \sigma_2 $	$\sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2}$	$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}$ $\left \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2} \right $
Ldist	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$	$\sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2}$

Tabella 3.1

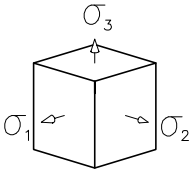
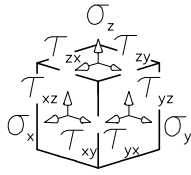
TENSIONE IDEALE CARICHI STATICI - TENSIONI TRIASSIALI		
TEORIA		
max	$ \sigma_1 , \sigma_2 , \sigma_3 $	
max	$ \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) $ $ \sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3) $ $ \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) $	
max	$ \sigma_1 - \sigma_2 $ $ \sigma_2 - \sigma_3 $ $ \sigma_3 - \sigma_1 $	
Ldist	$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$ oppure $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$	$\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)} +$ $3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$

Tabella 3.2

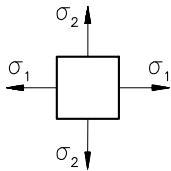
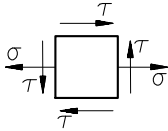
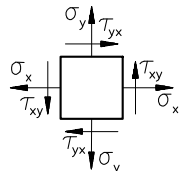
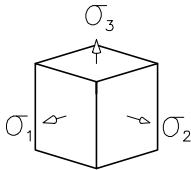
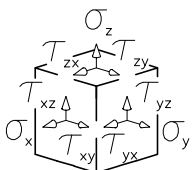
TENSIONE IDEALE CARICHI AFFATICANTI-TENSIONE PIANA			
TEORIA	 <p>tensioni principali</p>	 <p>stato piano incompleto</p>	 <p>stato piano completo</p>
max	$ \sigma_1 $ $ \sigma_2 $	$\left \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \right $ $\alpha_0 = \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}}$	$\left \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\alpha_0 \tau_{xy})^2} \right $ $\alpha_0 = \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}}$
max	$ \sigma_1 - \nu \sigma_2 $ $ \sigma_2 - \nu \sigma_1 $	$\left \frac{1-\nu}{2} \sigma \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4(\alpha_0 \tau)^2} \right $ $\alpha_0 = \frac{1}{1+\nu} \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}}$	$\left \frac{1-\nu}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1+\nu}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4(\alpha_0 \tau_{xy})^2} \right $ $\alpha_0 = \frac{1}{1+\nu} \frac{\sigma_{cr}}{\tau_{cr}}$
max e Ldist	$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,cr}} \right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{1,cr} \sigma_{2,cr}} \leq 1$	$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 \leq 1$ sottocaso: $\sigma = \sigma_{Mf} + \sigma_N$ $\left(\frac{\sigma_{Mf}}{\sigma_{Mf,cr}} + \frac{\sigma_N}{\sigma_{N,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 \leq 1$	$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}} \right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{x,cr} \sigma_{y,cr}} + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy,cr}} \right)^2 \leq 1$

Tabella 3.3

<div>TENSIONE IDEALE</div> <div>CARICHI AFFATICANTI - TENSIONI TRIASSIALI</div>	
TEORIA	<div>  <div>tensioni principali</div> </div>
<i>Ldist</i>	<div> $\sigma_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3,m} + \sigma_{1,2,3,a}$ $\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 + \sigma_{3,m}^2 - (\sigma_{1,m}\sigma_{2,m} + \sigma_{2,m}\sigma_{3,m} + \sigma_{3,m}\sigma_{1,m})}$ $\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 + \sigma_{3,a}^2 - (\sigma_{1,a}\sigma_{2,a} + \sigma_{2,a}\sigma_{3,a} + \sigma_{3,a}\sigma_{1,a})}$ $\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}$ </div> <div>Cicli in fase od in controfase</div> <div> $\sigma_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3,m} + \sigma_{1,2,3,a}$ $\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 + \sigma_{3,m}^2 - (\sigma_{1,m}\sigma_{2,m} + \sigma_{2,m}\sigma_{3,m} + \sigma_{3,m}\sigma_{1,m})}$ $\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 + \sigma_{3,a}^2 - (\sigma_{1,a}\sigma_{2,a} + \sigma_{2,a}\sigma_{3,a} + \sigma_{3,a}\sigma_{1,a})}$ </div>
TEORIA	<div>  <div>stato triassiale completo</div> </div>

<i>L_{dist}</i>	$\sigma_{x,y,z} = \sigma_{x,y,z,m} + \sigma_{x,y,z,a}$ $\tau_{xy,yz,zx} = \tau_{xy,yz,zx,m} + \tau_{xy,yz,zx,a}$ $\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{x,m}^2 + \sigma_{y,m}^2 + \sigma_{z,m}^2 - (\sigma_{x,m}\sigma_{y,m} + \sigma_{y,m}\sigma_{z,m} + \sigma_{z,m}\sigma_{x,m}) + 3(\tau_{xy,m}^2 + \tau_{yz,m}^2 + \tau_{zx,m}^2)}$ $\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \sigma_{y,a}^2 + \sigma_{z,a}^2 - (\sigma_{x,a}\sigma_{y,a} + \sigma_{y,a}\sigma_{z,a} + \sigma_{z,a}\sigma_{x,a}) + 3(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2)}$ $\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}$ <p>Cicli in fase od in controfase</p> $\sigma_{1,2,3} = \sigma_{1,2,3,m} + \sigma_{1,2,3,a}$ $\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 + \sigma_{3,m}^2 - (\sigma_{1,m}\sigma_{2,m} + \sigma_{2,m}\sigma_{3,m} + \sigma_{3,m}\sigma_{1,m})}$ $\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 + \sigma_{3,a}^2 - (\sigma_{1,a}\sigma_{2,a} + \sigma_{2,a}\sigma_{3,a} + \sigma_{3,a}\sigma_{1,a})}$
--------------------------------	---

Tabella 3.4

4 Esempi di calcoli di tensioni ideali

4.1 Può una tensione ideale statica secondo Von Mises valere - 35 MPa? La tensione ideale statica secondo Von Mises è sempre positiva, e quindi non può assumere un valore negativo. Tutte le tensioni ideali statiche producono valori solo positivi.

4.2 Si considerano i quindici stati tensionali **statici** (cioè non affaticanti) , in stato piano di tensione ed in stato tridimensionale, rappresentati in Figura 4.2.1 . Per ogni stato tensionale, si vogliono calcolare le tensioni ideali secondo la teoria della σ_{max} modificata, della σ_{max} , e del L_{dist} . In particolare, si vuol verificare se è garantita la resistenza secondo la σ_{max} modificata, con riferimento ad una allumina per impiego biomedico (materiale fragile con tensione di rottura di 350 MPa , impiegato nelle testine in ceramica per protesi d'anca), e se è garantita la resistenza secondo la σ_{max} ed il L_{dist} , con riferimento al C40 , acciaio a comportamento duttile con tensione di snervamento di 430 MPa . Per entrambi i materiali si vuole inoltre calcolare il relativo coefficiente di sicurezza. Non si considerano le teorie della σ_{max} , della σ_{max} , e del L_{def} , perché queste teorie sono state abbandonate nella pratica ingegneristica.

Io conosco un pianeta su cui c'è un signor Chermisi. Non ha mai annusato un fiore. Non ha mai guardato una stella. Non ha mai voluto bene a nessuno. Non fa altro che addizioni.

IL Piccolo Principe
Antoine de Saint-Exupéry

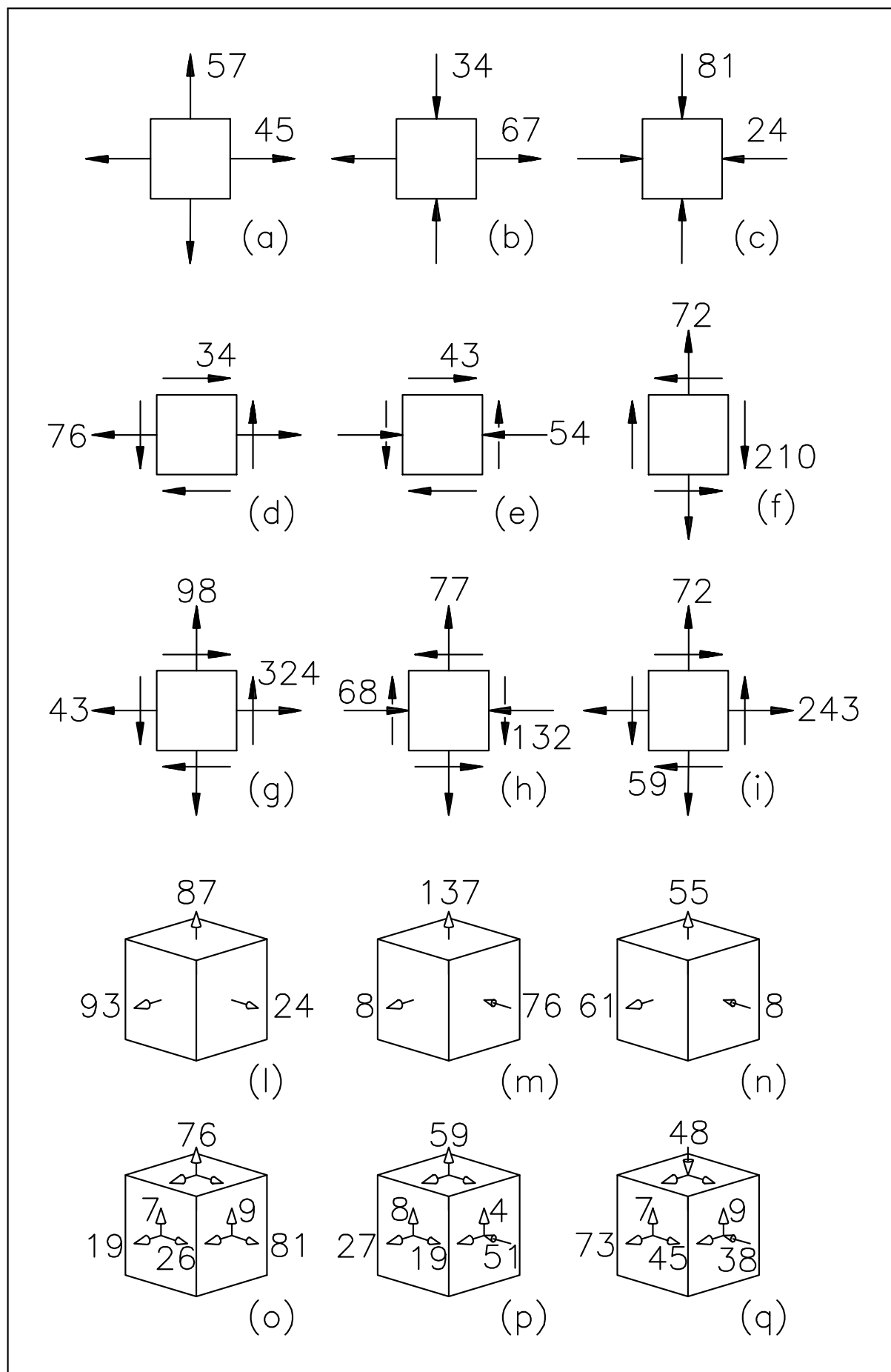


Figura 4.2.1

Error! Bookmark not defined.

Stato (a) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = 57\ MPa \quad ; \quad n = \frac{350}{57} = 6.14 \right.$$

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = 57\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{57} = 7.54 \right.$$

$$\sigma_{id} \left| L_{dist} = \sqrt{57^2 + 45^2 - 57 \times 45} = 52.05\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{52.05} = 8.26 \right.$$

Stato (b) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = 67\ MPa \quad ; \quad n = \frac{350}{67} = 5.22 \right.$$

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = 67 + 34 = 101\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{101} = 4.26 \right.$$

$$\sigma_{id} \left| L_{dist} = \sqrt{67^2 + 34^2 - (67 \times -34)} = 89.01\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{89.01} = 4.83 \right.$$

Stato (c) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = 0\ MPa \quad ; \quad n = \frac{350}{0} = \infty \right.$$

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = 81\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{81} = 5.31 \right.$$

$$\sigma_{id} \left| L_{dist} = \sqrt{81^2 + 24^2 - (-81 \times -24)} = 72.06\ MPa \quad ; \quad n = \frac{430}{72.06} = 5.97 \right.$$

Stato (d) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = \frac{76}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{76^2 + 4 \times 34^2} = 89 \text{ MPa}$$

(si è scelto il segno + perché dà la massima σ_{id} di trazione) ; $n = \frac{350}{89} = 3.93$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = \sqrt{76^2 + 4 \times 34^2} = 101.98 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{101.98} = 4.22$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \sqrt{76^2 + 3 \times 34^2} = 96.15 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{96.15} = 4.47$$

Stato (e) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = \frac{-54}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(-54)^2 + 4 \times 43^2} = 23.77 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{350}{23.77} = 14.72$$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = \sqrt{54^2 + 4 \times 43^2} = 101.55 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{101.55} = 4.23$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \sqrt{54^2 + 3 \times 43^2} = 92 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{92} = 4.67$$

Stato (f) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = \frac{72}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{72^2 + 4 \times 210^2} = 249.06 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{350}{249.06} = 1.41$$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = \sqrt{72^2 + 4 \times 210^2} = 426.13 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{426.13} = 1.01$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \sqrt{72^2 + 3 \times 210^2} = 371.38 \text{ MPa} ; \quad n = \frac{430}{371.38} = 1.16$$

Stato (g) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = \frac{98+43}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(98-43)^2 + 4 \times 324^2} = 395.67 \text{ MPa} \right.$$

(si è scelto il segno + perché dà la massima s_{id} di trazione) ; $n = \frac{350}{395.67} = 0.88 < 1 \Rightarrow$ collasso

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = \sqrt{(98-43)^2 + 4 \times 324^2} = 650.33 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{650.33} = 0.66 < 1 \Rightarrow \text{collasso}$$

$$\sigma_{id} \left| Ldist = \sqrt{98^2 + 43^2 - 98 \times 43 + 3 \times 324^2} = 567 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{567} = 0.76 < 1 \Rightarrow \text{collasso}$$

Stato (h) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = \frac{77-68}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(77+68)^2 + 4 \times 132^2} = 155.1 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{350}{155.1} = 2.26$$

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = \sqrt{(77+68)^2 + 4 \times 132^2} = 301.2 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{301.2} = 1.43$$

$$\sigma_{id} \left| Ldist = \sqrt{77^2 + 68^2 + 77 \times 68 + 3 \times 132^2} = 261 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{261} = 1.65$$

Stato (i) :

$$\sigma_{id} \left| \sigma_{max\ modificata} = \frac{243+72}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(243-72)^2 + 4 \times 59^2} = 261.38 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{350}{261.38} = 1.34$$

$$\sigma_{id} \left| \tau_{max} = \frac{243+72}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(243-72)^2 + 4 \times 59^2} = 261.4 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{261.4} = 1.65$$

$$\sigma_{id} \left| Ldist = \sqrt{243^2 + 72^2 - 243 \times 72 + 3 \times 59^2} = 239.1 \text{ MPa} \right. ; \quad n = \frac{430}{239.1} = 1.8$$

Si esaminano ora gli stati tensionali triassiali riferiti alle direzioni principali (l) , (m) , (n) .

Stato (l) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = 93 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{350}{93} = 3.76$$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = 93 - 24 = 69 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{69} = 6.23$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(93 - 87)^2 + (87 - 24)^2 + (24 - 93)^2} = 66.20 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{66.20} = 6.5$$

Stato (m) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = 137 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{350}{137} = 2.55$$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = 137 + 76 = 213 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{213} = 2.02$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(137 - 8)^2 + (8 + 76)^2 + (-76 - 137)^2} = 185.83 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{185.83} = 2.31$$

Stato (n) :

$$\sigma_{id} \Big|_{\sigma \max \text{ modificata}} = 61 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{350}{61} = 5.74$$

$$\sigma_{id} \Big|_{\tau \max} = 61 + 8 = 69 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{69} = 6.23$$

$$\sigma_{id} \Big|_{L \text{ dist}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(61 - 55)^2 + (55 + 8)^2 + (-8 - 61)^2} = 66.20 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{66.20} = 6.5$$

Si noti che la σ_{id} secondo il L_{dist} è identica per i casi (l) ed (n) . Ciò è dovuto al fatto che i due stati tensionali triassiali distano tra loro di una tensione idrostatica, che non influenza il valore della σ_{id} secondo il L_{dist} . In altre parole, la differenza tra lo stato tensionale di (l) e di (n) è una tensione idrostatica di 32 MPa .

Si esaminano ora gli stati tensionali triassiali completi (o) , (p) , (q) . Per calcolare la tensione ideale, occorre in genere determinare preventivamente le tensioni principali. Una volta note le tensioni principali, sono disponibili le formule di calcolo della tensione ideale. Restringendo l'interesse alle teorie della tensione ideale che sono di valore applicativo, e cioè alla teoria della σ_{max} modificata, della σ_{max} , e del L_{dist} , l'unica teoria che permette di calcolare direttamente la tensione ideale per un caso tridimensionale completo senza bisogno di determinare preventivamente le tensioni principali è quella del L_{dist} . In questo esercizio non si esamina la determinazione delle tensioni principali, rimandando per questo aspetto lo studente ai testi di Scienza delle Costruzioni, e quindi si calcola per gli stati tensionali (o) , (p) , (q) soltanto la tensione ideale secondo il L_{dist} .

Stato (o) :

$$\sigma_{id} \Big|_{L_{dist}} = \sqrt{76^2 + 19^2 + 81^2 - (76 \times 19 + 19 \times 81 + 81 \times 76) + 3(7^2 + 26^2 + 9^2)} =$$

$$77.31 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{77.31} = 5.56$$

Stato (p) :

$$\sigma_{id} \Big|_{L_{dist}} = \sqrt{59^2 + 27^2 + 51^2 - (59 \times 27 - 27 \times 51 - 51 \times 59) + 3(8^2 + 19^2 + 4^2)} =$$

$$104.53 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{104.53} = 4.11$$

Stato (q) :

$$\sigma_{id} \Big|_{L_{dist}} = \sqrt{48^2 + 73^2 + 38^2 - (-48 \times 73 - 73 \times 38 + 38 \times 48) + 3(7^2 + 45^2 + 9^2)} =$$

$$141.41 \text{ MPa} \quad ; \quad n = \frac{430}{141.41} = 3.04$$

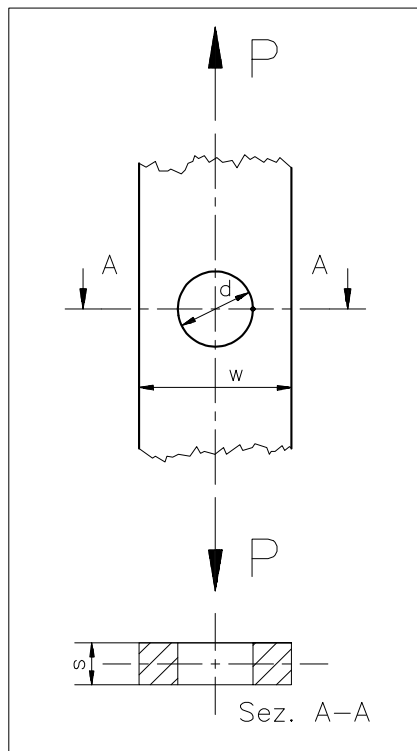


Figura 4.3.1

4.3 Si considera ora la lastra forata di Figura 4.3.1 , soggetta a sforzo normale **statico**, e realizzata in 16CrNi4 ed in C40 . Si vuole valutare il coefficiente di sicurezza della lastra forata per $P = 10000 \text{ N}$, $d = 20 \text{ mm}$, $w = 40 \text{ mm}$, $s = 5 \text{ mm}$. Dalla formula interpolante (5.1.1) per $d/w = 0.5$, il Fattore di forma vale $k = 2.125$. Siccome il carico è statico, per il 16CrNi4 $cr = R_{s,Sforzo \text{ normale}} = 900 \text{ MPa}$. Nella pratica tuttavia ci si riferisce più spesso a $R_{s,Flessione} = 1070 \text{ MPa}$, un valore di poco superiore a $R_{s,Sforzo \text{ normale}}$. L'acciaio 16CrNi4 è da cementazione, e quindi supposto **fragile** per quel che riguarda l'effetto intaglio. Quindi k va impiegato a moltiplicare la tensione nominale statica n , secondo la Tabella 4.4.2 , per dare la tensione teorica statica t . Si ottiene :

$$\sigma_n = \frac{10'000}{(40 - 20) \times 5} = 100 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_t = 2.125 \times 100 = 212.5$$

$$n = \frac{1070}{212.5} = 5.04$$

Si riconsidera ora la lastra forata di Figura 4.3.1 , questa volta pensata realizzata in C40 . Siccome il carico è **statico**, per il C40 $cr = R_{s,Sforzo \text{ normale}} = 360 \text{ MPa}$. Nella pratica tuttavia ci si riferisce più spesso a $R_{s,Flessione} = 430 \text{ MPa}$, un valore superiore a $R_{s,Sforzo \text{ normale}}$. L'acciaio C40 è da bonifica, e quindi supposto **duttile** relativamente all'effetto intaglio. Quindi la verifica di resistenza va effettuata riferendosi alla tensione nominale statica n , secondo la Tabella 4.4.2 . Si ottiene :

$$\sigma_n = \frac{10'000}{(40 - 20) \times 5} = 100 \text{ MPa} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{430}{100} = 4.3$$

4.4 Si considerano nel seguito i tre stati tensionali **affaticanti** esistenti nei tre alberi rotanti di Figura 4.4.1 . In seguito alla presenza di Momento flettente, nasce una tensione che, a causa della rotazione dell'albero, segue un ciclo all'inversione. In seguito poi alla presenza di Momento torcente, nasce anche una tensione che però è statica, dato che la rotazione dell'albero non produce oscillazioni di in un punto generico del materiale. Infine, lo Sforzo normale produce una . Si assume che lo Sforzo normale sia dovuto alla presenza di un precarico assiale richiesto da cuscinetti ad X o ad O . Tale precarico non varia con la rotazione dell'albero, e quindi la di Sforzo normale è statica. La Figura 4.4.1 presenta anche i quadrati elementari con le relative sollecitazioni. Lo stato tensionale è quindi affaticante, in tensione piana, in stato piano incompleto.

Per ognuno dei tre stati tensionali di Figura 4.4.1 , si vogliono

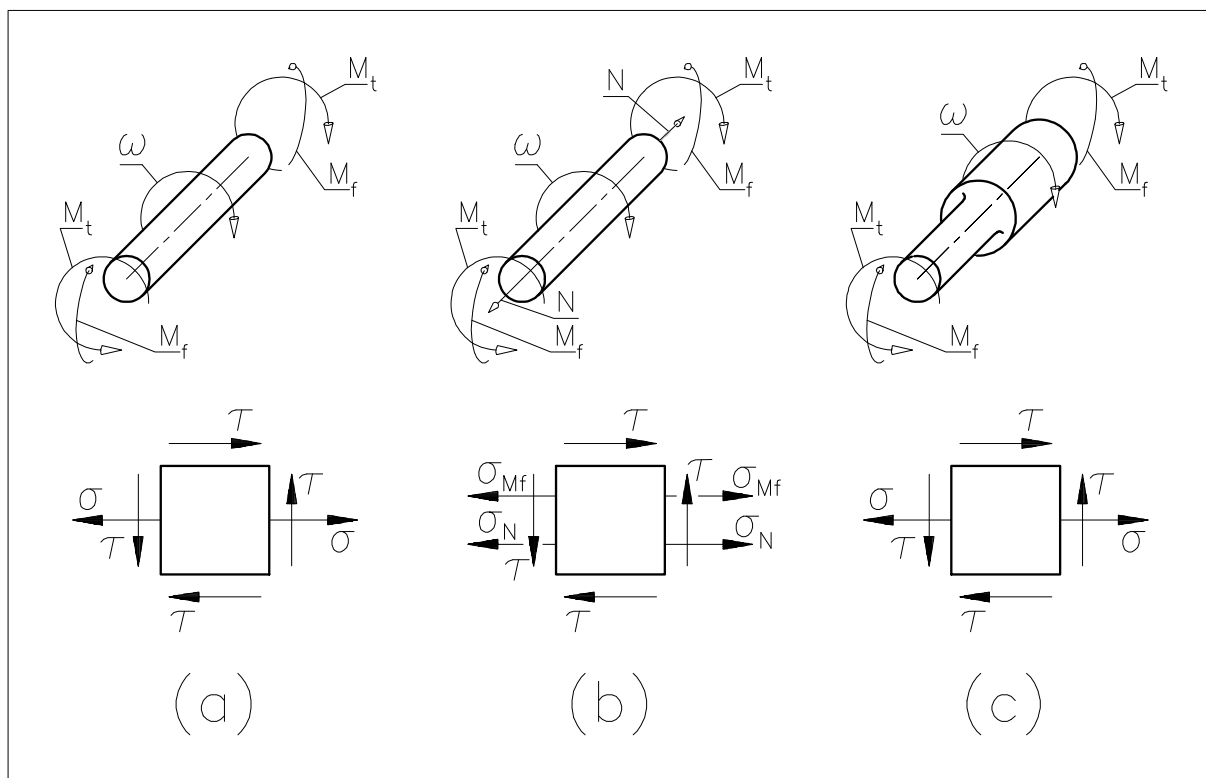


Figura 4.4.1

calcolare le tensioni ideali secondo la teoria della σ_{max} e del L_{dist} . In particolare, si vuole verificare se è garantita la resistenza a tempo infinito dei tre alberi costruiti in 16CrNi4 ed in C40 , e si vogliono anche sviluppare le formule per il calcolo del il coefficiente di sicurezza.

Per lo **stato (a)** di Figura 4.4.1 , si impiega la formula (2.2.1.5) :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

dove le tensioni σ e τ sono **tensioni nominali**, dato che l'albero è di sezione costante, e quindi non nascono concentrazioni di tensione. Si ha quindi :

$$\sigma = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad ; \quad \tau = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \quad ; \quad \left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Per il 16CrNi4 , $\sigma_{cr} = \sigma_{inv,flessione} = 780$ MPa , mentre $\tau_{cr} = \tau_s = 560$ MPa . Se per esempio $M_f = 40$ Nm , $M_t = 30$ Nm , $d = 20$ mm , si ottiene :

$$\sigma = \frac{40'000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 50.93 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau = \frac{30'000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 19.10 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{50.93}{780}\right)^2 + \left(\frac{19.10}{560}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 13.57$$

Per il C40 , $\sigma_{cr} = \sigma_{inv,flessione} = 280$ MPa , mentre $\tau_{cr} = \tau_s = 220$ MPa . Se $M_f = 40$ Nm , $M_t = 30$ Nm , $d = 20$ mm , si ottiene :

$$\sigma = \frac{40'000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 50.93 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau = \frac{30'000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 19.10 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{50.93}{280}\right)^2 + \left(\frac{19.10}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 4.96$$

Per lo **stato (b)** di Figura 4.4.1 , si impiega la formula (2.2.1.6) :

$$\sigma = \sigma_{Mf} + \sigma_N$$

$$\left(\frac{\sigma_{Mf}}{\sigma_{Mf,cr}} + \frac{\sigma_N}{\sigma_{N,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

dove le tensioni σ e τ sono ancora **tensioni nominali**, dato che l'albero è di sezione costante, e quindi non nascono concentrazioni di tensione. Si ha quindi :

$$\sigma = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad ; \quad \tau = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \quad ; \quad \left(\frac{\sigma_{Mf}}{\sigma_{Mf,cr}} + \frac{\sigma_N}{\sigma_{N,cr}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}} \right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Per il 16CrNi4 , $M_{f,cr} = \text{inv,flessione} = 780 \text{ MPa}$, $N_{cr} = R_{s,N} = 900 \text{ MPa}$, mentre $\sigma_{cr} = \sigma_s = 560 \text{ MPa}$. Se per esempio $M_f = 50 \text{ Nm}$, $N = 10000 \text{ N}$, $M_t = 40 \text{ Nm}$, $d = 20 \text{ mm}$, si ottiene :

$$\sigma_{Mf} = \frac{50'000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 63.66 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_N = \frac{10'000}{\frac{\pi 20^2}{4}} = 31.83 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau = \frac{40'000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 25.46 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{63.66}{780} + \frac{31.83}{900} \right)^2 + \left(\frac{25.46}{560} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 7.97$$

Per il C40 , $M_{f,cr} = \text{inv,flessione} = 280 \text{ MPa}$, $N_{cr} = R_{s,N} = 360 \text{ MPa}$, mentre $\sigma_{cr} = \sigma_s = 220 \text{ MPa}$. Se $M_f = 50 \text{ Nm}$, $N = 10000 \text{ N}$, $M_t = 40 \text{ Nm}$, $d = 20 \text{ mm}$, si ottiene :

$$\sigma_{Mf} = \frac{50'000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 63.66 \text{ MPa} \quad ; \quad \sigma_N = \frac{10'000}{\frac{\pi 20^2}{4}} = 31.83 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau = \frac{40'000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 25.46 \text{ MPa} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{63.66}{280} + \frac{31.83}{360} \right)^2 + \left(\frac{25.46}{220} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 2.97$$

Per lo **stato (c)** di Figura 4.4.1 , si impiega la formula (2.2.1.5) :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

dove le tensioni σ e τ sono **tensioni effettive**, dovendo tener conto delle concentrazioni di tensione dovute alla presenza dello spallamento nell'albero. Si ha quindi :

$$\sigma_n = \frac{M_f}{\frac{\pi d^3}{32}} \quad ; \quad \tau_n = \frac{M_t}{\frac{\pi d^3}{16}} \quad ; \quad \left(\frac{\sigma_{eff}}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{eff}}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Per il 16CrNi4 , $\sigma_{cr} = \sigma_{inv, flessione} = 780$ MPa , mentre $\tau_{cr} = \tau_s = 560$ MPa . Si assume $M_f = 55$ Nm e $M_t = 35$ Nm . Se il diametro minore, il diametro maggiore, ed il raggio di raccordo dello spallamento valgono $d = 20$ mm , $D = 24$ mm, $r = 1.5$ mm , il fattore di forma k flessionale si ricava dalla Tabella di Figura 5.5.4 , per $D/d = 1.2$ e per $r/d = 0.075$. Si deriva un k flessionale 1.75 . Similmente, il fattore di forma k torsionale si ricava dalla Tabella di Figura 5.5.5 , per $D/d = 1.2$ e per $r/d = 0.075$. Si deriva un k torsionale 1.4 . In altre parole, è bene distinguere il valore di k a flessione da quello di torsione. L'acciaio 16CrNi4 è da cementazione, e quindi supposto **fragile** per quel che riguarda l'effetto intaglio. Quindi k va impiegato sia a moltiplicare la tensione affaticante che la tensione statica , secondo la Tabella 4.4.2 . Si noti che nei calcoli pratici si tende ad impiegare la Tabella 4.4.2 e non la 4.4.1 , cioè si usa k al posto di k . Si ottiene :

$$\sigma_n = \frac{55000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 70.03 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_n = \frac{35000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 22.28 \text{ MPa} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1.75 \times 70.03}{780}\right)^2 + \left(\frac{1.4 \times 22.28}{560}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

Per il C40 , $\sigma_{cr} = \sigma_{inv, flessione} = 280$ MPa , mentre $\tau_{cr} = \tau_s = 220$ MPa . Si assume $M_f = 55$ Nm e $M_t = 35$ Nm . Il diametro minore, il diametro maggiore, ed il raggio di raccordo dello spallamento valgono ancora $d = 20$

Error! Bookmark not defined.

mm , $D = 24$ mm , $r = 1.5$ mm , per cui k flessionale 1.75 e k torsionale 1.4 . L'acciaio C40 è da bonifica, e quindi supposto **duttile** per quel che riguarda l'effetto intaglio. Quindi k va impiegato a moltiplicare soltanto la tensione affaticante , secondo la Tabella 4.4.2 . Si noti che nei calcoli pratici si tende ad impiegare la Tabella 4.4.2 e non la 4.4.1 , cioè si usa k al posto di k . Si ottiene :

$$\sigma_n = \frac{55'000}{\frac{\pi 20^3}{32}} = 70.03 \text{ MPa} \quad ; \quad \tau_n = \frac{35'000}{\frac{\pi 20^3}{16}} = 22.28 \text{ MPa} \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1.75 \times 70.03}{280} \right)^2 + \left(\frac{22.28}{220} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad n = 2.23$$

4.5 Si considerano nel seguito i quindici stati tensionali **affaticanti** in stato piano di tensione ed in stato tridimensionale, rappresentati in Figura 4.5.1 . Per ogni stato tensionale, si vuole calcolare la tensione ideale secondo la teoria del L_{dist} , ed il relativo coefficiente di sicurezza con riferimento al C40 , acciaio a comportamento duttile con $R_{s,flessione} = \sigma_{flessione} = 430$ MPa , $\sigma_{inv,flessione} = 280$ MPa , $\sigma_s = \sigma_o = 220$ MPa , $\sigma_{inv} = 160$ MPa .

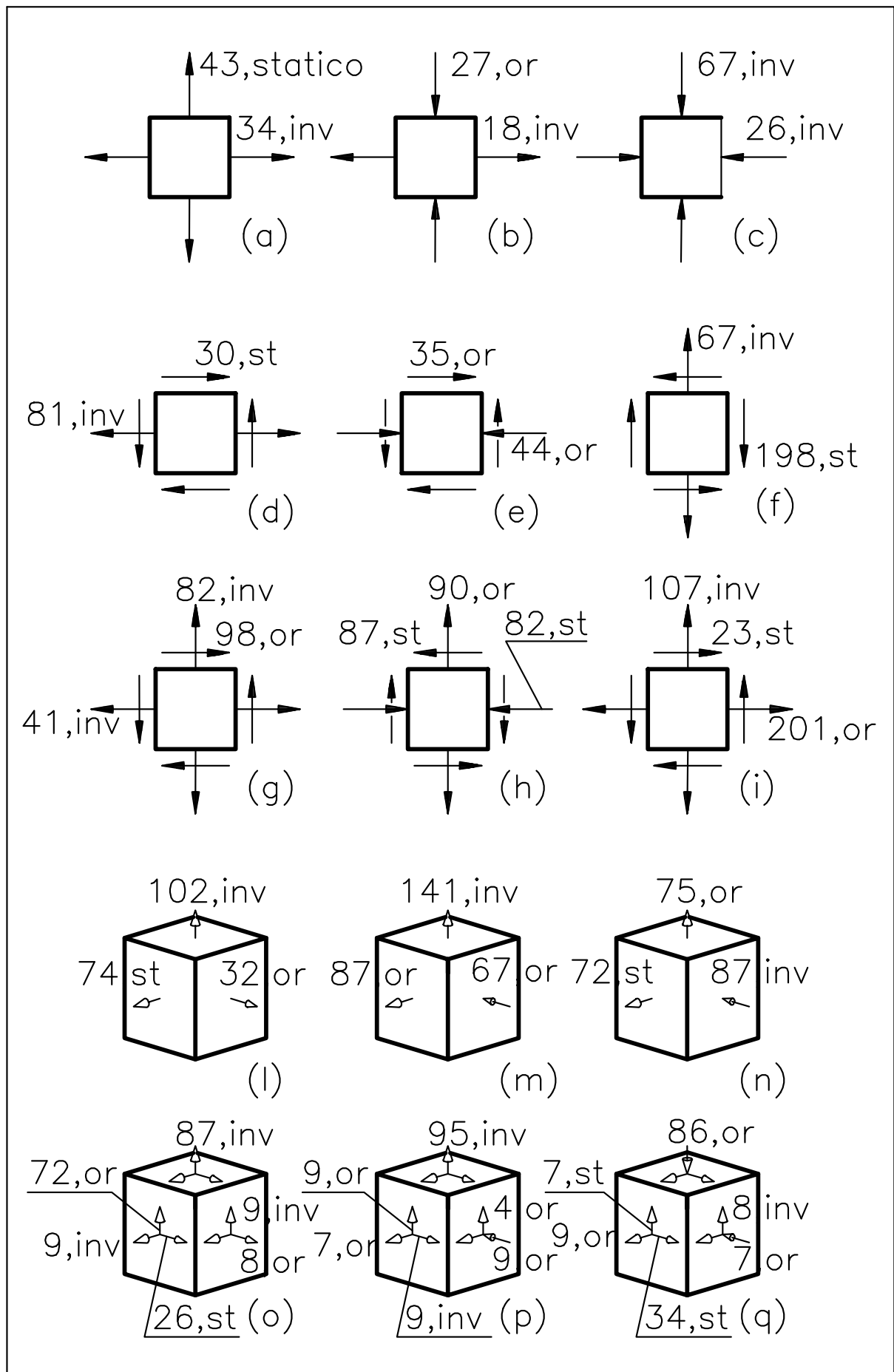


Figura 4.5.1

Error! Bookmark not defined.

Stato (a) :

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{1,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{2,cr}}\right)^2 - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_{1,cr} \sigma_{2,cr}} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{43}{430}\right)^2 + \left(\frac{34}{280}\right)^2 - \frac{43 \times (-34)}{430 \times 280} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 5.21$$

dove si è assunto -34 (e non +34) , in modo da ottenere il massimo valore del membro di sinistra. La tensione all'inversione infatti oscilla tra +34 e -34 MPa .

Stato (b) :

$$\left(\frac{27}{430}\right)^2 + \left(\frac{18}{280}\right)^2 - \frac{(-27) \times 18}{430 \times 280} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 9.09$$

dove si sono scelti i segni in modo che il membro di sinistra risulti massimo. Infatti una tensione vale sempre -27 , mentre l'altra oscilla tra +18 e -18 . Esiste quindi un istante in cui una tensione vale -27 e l'altra +18 MPa .

Stato (c) . Se i due cicli delle sono in fase, non esiste un momento in cui le tensioni valgono -67 e + 26 , per cui :

$$\left(\frac{67}{280}\right)^2 + \left(\frac{26}{280}\right)^2 - \frac{67 \times 26}{280 \times 280} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 4.79$$

Se invece i due cicli delle sono in controfase, esiste un momento in cui le tensioni valgono -67 e + 26 , per cui :

$$\left(\frac{67}{280}\right)^2 + \left(\frac{26}{280}\right)^2 + \frac{67 \times 26}{280 \times 280} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 3.37$$

Stato (d) :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{cr}}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{81}{280}\right)^2 + \left(\frac{30}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 3.13$$

Stato (e) :

$$\left(\frac{44}{430}\right)^2 + \left(\frac{35}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 5.29$$

Stato (f) :

$$\left(\frac{67}{280}\right)^2 + \left(\frac{198}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 1.074$$

Stato (g) . Se i due cicli delle sono in fase, non esiste un momento in cui le tensioni valgono -41 e + 82 , per cui :

$$\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_{x,cr}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{\sigma_{y,cr}}\right)^2 - \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_{x,cr} \sigma_{y,cr}} + \left(\frac{\tau_{xy}}{\tau_{xy,cr}}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$
$$\left(\frac{41}{280}\right)^2 + \left(\frac{82}{280}\right)^2 - \frac{41 \times 82}{280 \times 280} + \left(\frac{98}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 1.95$$

Se invece i due cicli delle sono in controfase, esiste un momento in cui le tensioni valgono -41 e + 82 , per cui :

$$\left(\frac{41}{280}\right)^2 + \left(\frac{82}{280}\right)^2 + \frac{41 \times 82}{280 \times 280} + \left(\frac{98}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 1.69$$

Stato (h) :

$$\left(\frac{82}{430}\right)^2 + \left(\frac{90}{430}\right)^2 - \frac{-82 \times 90}{430 \times 430} + \left(\frac{87}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 1.90$$

Stato (i) . Se i due cicli delle sono in fase, esiste un momento in cui le tensioni valgono +201 e +107 , per cui :

$$\left(\frac{201}{430}\right)^2 + \left(\frac{107}{280}\right)^2 - \frac{201 \times 107}{430 \times 280} + \left(\frac{23}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 2.25$$

Se invece i due cicli delle sono in controfase, esiste un momento in cui le tensioni valgono +201 e -107 , per cui :

$$\left(\frac{201}{430}\right)^2 + \left(\frac{107}{280}\right)^2 - \frac{201 \times (-107)}{430 \times 280} + \left(\frac{23}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 1.34$$

Si esaminano ora gli stati tensionali triassiali riferiti alle direzioni principali (l) , (m) , (n) .

Stato (l) . Se i due cicli delle all'origine e all'inversione sono in fase, esiste un momento in cui le tensioni valgono +32 e +102 , per cui :

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{1,m}^2 + \sigma_{2,m}^2 + \sigma_{3,m}^2 - (\sigma_{1,m} \sigma_{2,m} + \sigma_{2,m} \sigma_{3,m} + \sigma_{3,m} \sigma_{1,m})}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{1,a}^2 + \sigma_{2,a}^2 + \sigma_{3,a}^2 - (\sigma_{1,a} \sigma_{2,a} + \sigma_{2,a} \sigma_{3,a} + \sigma_{3,a} \sigma_{1,a})}$$

$$74 \Rightarrow \sigma_{1,m} = 74 ; \sigma_{1,a} = 0$$

$$32 \Rightarrow \sigma_{2,m} = 16 ; \sigma_{2,a} = 16$$

$$102 \Rightarrow \sigma_{3,m} = 0 ; \sigma_{3,a} = 102$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{74^2 + 16^2 + 0 - (74 \times 16 + 16 \times 0 + 0 \times 74)} = 67.44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{0 + 16^2 + 102^2 - (0 \times 16 + 16 \times 102 + 102 \times 0)} = 95.02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 67.44 \pm 95.02 \text{ MPa}$$

Se si ipotizza che il ciclo di fatica monodimensionale equivalente esplode a $m = \text{cost}$, l'ipotesi più restrittiva, la tensione critica flessionale si

Error! Bookmark not defined.

ricava dal diagramma di Goodman del C40 tracciando una retta verticale con $\sigma_m = 67.44 \text{ MPa}$, e trovando l'ordinata in cui questa retta taglia il contorno superiore del diagramma di Goodman. Si trova $\sigma_{cr} = 350 \text{ MPa}$, per cui :

$$n = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{sup, normale \text{ funzionamento}}} = \frac{350}{67.44 + 95.02} = 2.15$$

Se invece i due cicli delle all'origine e all'inversione sono in controfase, esiste un momento in cui le tensioni valgono $+32$ e -102 , per cui occorre attribuire segni diversi alle parti alterne di queste due tensioni:

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{74^2 + 16^2 + 0 - (74 \times 16 + 16 \times 0 + 0 \times 74)} = 67.44 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{0 + 16^2 + 102^2 - (0 \times 16 + 16 \times (-102) + (-102) \times 0)} = 110.87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 67.44 \pm 110.87 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{350}{67.44 + 110.87} = 1.96$$

Stato (m) . Si suppone per semplicità che i cicli tensionali siano in fase. Questa ipotesi non è la più cautelativa, ma comunque la più frequente. Si ottiene :

$$87 \Rightarrow \sigma_{1,m} = 43.5; \sigma_{1,a} = 43.5$$

$$67 \Rightarrow \sigma_{2,m} = -33.5; \sigma_{2,a} = 33.5$$

$$141 \Rightarrow \sigma_{3,m} = 0; \sigma_{3,a} = 141$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{43.5^2 + 33.5^2 + 0 - (43.5 \times (-33.5) + (-33.5) \times 0 + 0 \times 43.5)} = 66.87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{43.5^2 + 33.5^2 + 141^2 - (43.5 \times 33.5 + 33.5 \times 141 + 141 \times 43.5)} = 102.87 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 66.87 \pm 102.87 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{310}{66.87 + 102.87} = 1.83$$

Stato (n) . Si suppone per semplicità che i cicli tensionali siano in fase. Si ottiene :

$$72 \Rightarrow \sigma_{1,m} = 72 ; \sigma_{1,a} = 0$$

$$87 \Rightarrow \sigma_{2,m} = 0 ; \sigma_{2,a} = 87$$

$$75 \Rightarrow \sigma_{3,m} = 37.5 ; \sigma_{3,a} = 37.5$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{72^2 + 0 + 37.5^2 - (72 \times 0 + 0 \times 37.5 + 37.5 \times 72)} = 62.37 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{0 + 87^2 + 37.5^2 - (0 \times 87 + 87 \times 37.5 + 37.5 \times 0)} = 75.58 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 62.37 \pm 75.58 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{308}{62.37 + 75.58} = 2.23$$

Si esaminano ora gli stati tensionali triassiali completi (o) , (p) , (q) . Come già notato, la teoria della tensione ideale secondo il L_{dist} permette di calcolare direttamente la tensione ideale per un caso tridimensionale completo senza bisogno di determinare preventivamente le tensioni principali. Si impiegano le formule (2.2.2.2) :

$$\sigma_{x,y,z} = \sigma_{x,y,z,m} + \sigma_{x,y,z,a}$$

$$\tau_{xy,yz,zx} = \tau_{xy,yz,zx,m} + \tau_{xy,yz,zx,a}$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{\sigma_{x,m}^2 + \sigma_{y,m}^2 + \sigma_{z,m}^2 - (\sigma_{x,m}\sigma_{y,m} + \sigma_{y,m}\sigma_{z,m} + \sigma_{z,m}\sigma_{x,m}) + 3(\tau_{xy,m}^2 + \tau_{yz,m}^2 + \tau_{zx,m}^2)}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{\sigma_{x,a}^2 + \sigma_{y,a}^2 + \sigma_{z,a}^2 - (\sigma_{x,a}\sigma_{y,a} + \sigma_{y,a}\sigma_{z,a} + \sigma_{z,a}\sigma_{x,a}) + 3(\tau_{xy,a}^2 + \tau_{yz,a}^2 + \tau_{zx,a}^2)}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a}$$

Stato (o) . Si suppone per semplicità che tutti i cicli tensionali siano in fase. Si ottiene :

Error! Bookmark not defined.

$$9 \Rightarrow \sigma_{x,m} = 0 ; \sigma_{x,a} = 9$$

$$8 \Rightarrow \sigma_{y,m} = 4 ; \sigma_{y,a} = 4$$

$$87 \Rightarrow \sigma_{z,m} = 0 ; \sigma_{z,a} = 87$$

$$26 \Rightarrow \tau_{xy,m} = 26 ; \tau_{xy,a} = 0$$

$$72 \Rightarrow \tau_{yz,m} = 36 ; \tau_{yz,a} = 36$$

$$9 \Rightarrow \tau_{zx,m} = 0 ; \tau_{zx,a} = 9$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{0 + 4^2 + 0 - (0 \times 4 + 4 \times 0 + 0 \times 0) + 3(26^2 + 36^2 + 0)} = 77.02 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{9^2 + 4^2 + 87^2 - (9 \times 4 + 4 \times 87 + 87 \times 9) + 3(0 + 36^2 + 9^2)} = 103.10 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 77.02 \pm 103.10 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{360}{77.02 + 103.10} = 2$$

Stato (p) . Si suppone per semplicità che tutti i cicli tensionali siano in fase. Si ottiene :

$$7 \Rightarrow \sigma_{x,m} = 3.5 ; \sigma_{x,a} = 3.5$$

$$9 \Rightarrow \sigma_{y,m} = -4.5 ; \sigma_{y,a} = 4.5$$

$$95 \Rightarrow \sigma_{z,m} = 0 ; \sigma_{z,a} = 95$$

$$9 \Rightarrow \tau_{xy,m} = 0 ; \tau_{xy,a} = 9$$

$$9 \Rightarrow \tau_{yz,m} = 4.5 ; \tau_{yz,a} = 4.5$$

$$4 \Rightarrow \tau_{zx,m} = 2 ; \tau_{zx,a} = 2$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{3.5^2 + (-4.5)^2 + 0 - (3.5 \times (-4.5) + (-4.5) \times 0 + 0 \times 3.5) + 3(0 + 4.5^2 + 2^2)} = 11 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{3.5^2 + 4.5^2 + 95^2 - (3.5 \times 4.5 + 4.5 \times 95 + 95 \times 3.5) + 3(9^2 + 4.5^2 + 2^2)} = 92.72 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 11 \pm 92.72 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{285}{11 + 92.72} = 2.75$$

Stato (q) . Si suppone per semplicità che tutti i cicli tensionali siano in fase. Si ottiene :

Error! Bookmark not defined.

$$9 \Rightarrow \sigma_{x,m} = 4.5; \sigma_{x,a} = 4.5$$

$$7 \Rightarrow \sigma_{y,m} = -3.5; \sigma_{y,a} = 3.5$$

$$86 \Rightarrow \sigma_{z,m} = -43; \sigma_{z,a} = 43$$

$$34 \Rightarrow \tau_{xy,m} = 34; \tau_{xy,a} = 0$$

$$7 \Rightarrow \tau_{yz,m} = 7; \tau_{yz,a} = 0$$

$$8 \Rightarrow \tau_{zx,m} = 0; \tau_{zx,a} = 8$$

$$\sigma_{id,m} = \sqrt{4.5^2 + (-3.5)^2 + (-43)^2 - (4.5 \times (-3.5) + (-3.5) \times (-43) + (-43) \times 4.5) + 3(34^2 + 7^2 + 0)} = 74.53 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id,a} = \sqrt{4.5^2 + 3.5^2 + 43^2 - (4.5 \times 3.5 + 3.5 \times 43 + 43 \times 4.5) + 3(0 + 0 + 8^2)} = 41.40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_{id,m} \pm \sigma_{id,a} = 74.53 \pm 41.40 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{285}{74.53 + 41.40} = 2.46$$

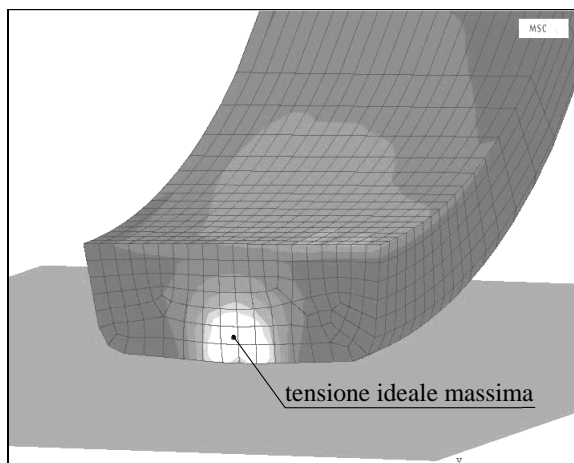


Figura 4.6.1



Figura 4.6.2

4.6 Nella Figura 4.6.1 viene mostrato un output agli elementi finiti di un battistrada aderente al cerchione (non mostrato in Figura) di una ruota gommata per carrelli impiegati nel trasporto di materiale in magazzino, Figura 4.6.2. La tensione ideale raggiunge il massimo valore al centro della zona più chiara, e cioè in un punto (lievemente) sottosuperficiale. Questo risultato è consueto oppure sorprendente?

L'esperienza ingegneristica mostra che la tensione ideale massima (in campo elastico, escludendo quindi l'elastoplasticità) cade quasi sempre in una zona alla superficie del corpo. Si pensi alle travi, agli alberi di trasmissione, alle molle, ai tubi, al piede di biella, allo spinotto. Il risultato di Figura 4.6.1 è quindi inconsueto.

Una rara eccezione al fatto che la tensione ideale massima sia superficiale è rappresentata dal contatto Hertziano, per esempio cilindro (pieno) contro piano, dove la tensione ideale massima è (lievemente) sottosuperficiale. L'esempio di Figura 4.6.1, nel quale la tensione ideale massima è sottosuperficiale, è infatti simile al contatto Hertziano cilindro-piano.

Il fatto poi che la tensione ideale massima sia quasi sempre superficiale è collegato al classificare come fragile un acciaio cementato (vedi il Capitolo

sull'Effetto Intaglio), dato che la tensione massima cade nello strato cementato superficiale, più fragile, e non nel cuore, più duttile.

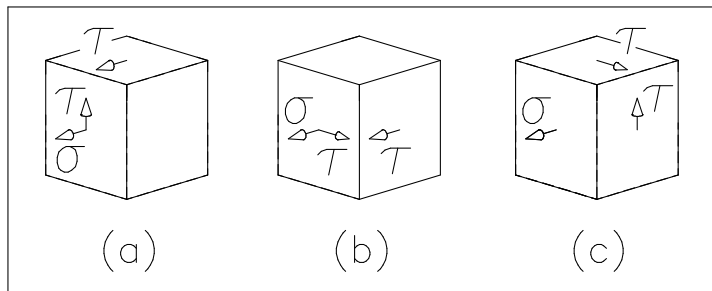


Figura 4.7.1

di σ (per esempio, $\sigma_{id} = 3 \sigma$).

4.7 Si consideri la Figura 4.7.1 con tre cubetti. Si ipotizzi che il valore della tensione σ sia numericamente uguale a quello della τ . Calcolare per i tre cubetti la tensione ideale statica secondo Mohr e secondo Von Mises, in termini

5 Esercizio svolto sulle tensioni ideali in un perno di puleggia

La puleggia folle della stazione di rinvio di una seggiovia, Figura 5.1, ha un diametro all'asse delle funi di 3.4 metri, e pesa 10000 N. Il tiro nei due rami della fune portante-traente varia, a seconda dei passeggeri e della temperatura, tra 130000 e 150000 N. Il perno della puleggia è cavo, e viene realizzato in C40. La normativa richiede che il coefficiente di sicurezza del perno sia maggiore od eguale a 6, e che la rotazione del piano di traccia A - A, causata dal tiro della fune, sia minore od eguale a 10^{-2} radianti, per evitare usura eccessiva della fune e scarruolamenti. Si verifichi se la struttura soddisfa a queste richieste.

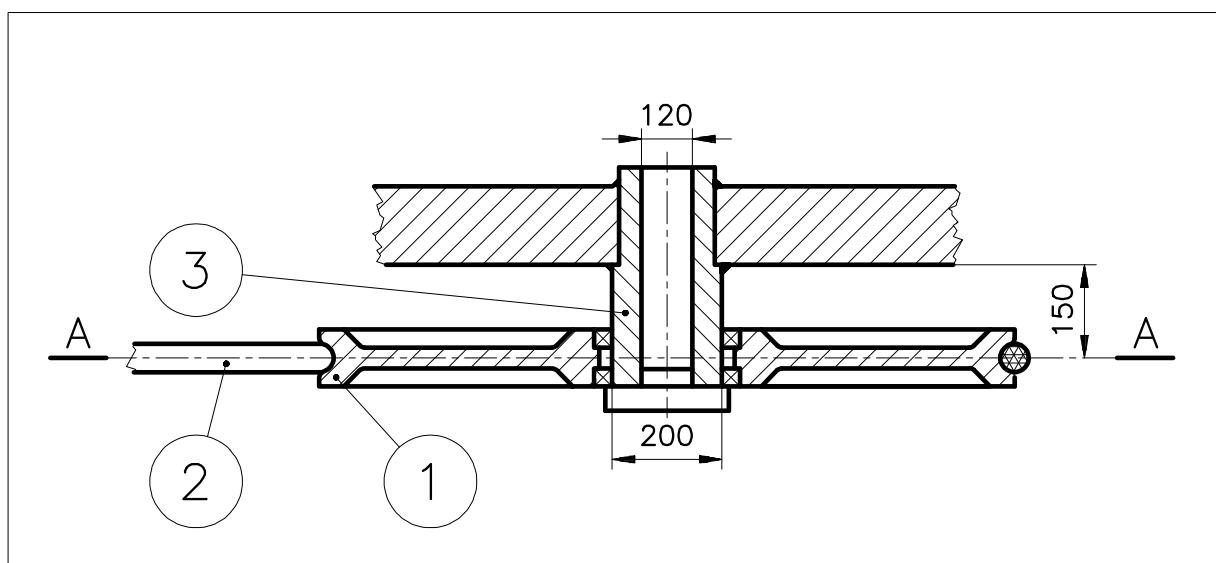


Figura 5.1

Il tiro complessivo massimo F esercitato sulla puleggia e quindi sul perno dai due rami della fune, Figura 5.2, vale $2 \cdot 150000 = 300000$ N. Il momento flettente massimo, dove il perno è incastrato alla piastra, vale quindi :

$$M_f = F l = 300'000 \times 150 = 45'000'000 \text{ N mm} \quad (5.1)$$

Si impiegano nel seguito per il calcolo delle tensioni le classiche espressioni valide per le travi, le quali però forniranno valori approssimati, dato che il perno è abbastanza tozzo.

La tensione flessionale massima nel perno all'incastro vale :

$$\sigma_f = \frac{M_f}{W} = \frac{M_f}{\frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right)} = \frac{45'000'000}{\frac{\pi 200^3}{32} \left(1 - \left(\frac{120}{200}\right)^4\right)} = 65.83 \text{ MPa} \quad (5.2)$$

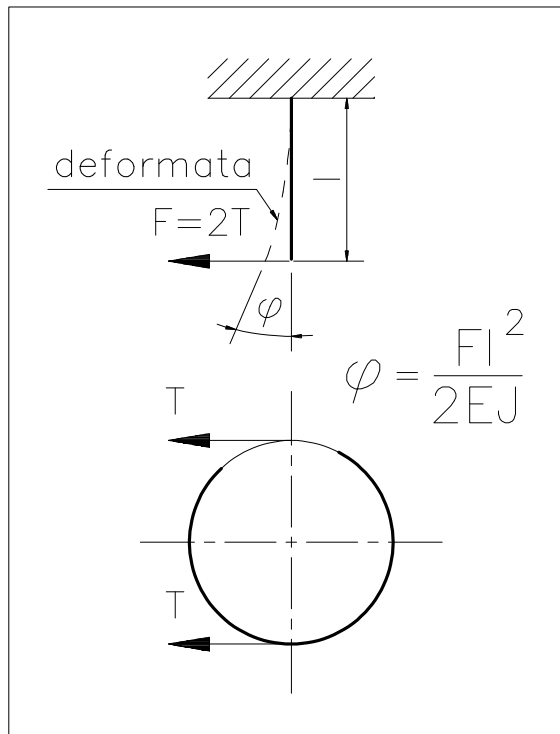


Figura 5.2

La tensione di sforzo normale nel perno vale, essendo il peso P della puleggia di 10000 N :

$$\sigma_N = \frac{P}{A} = \frac{P}{\frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}} = \frac{10'000}{\frac{\pi (200^2 - 120^2)}{4}} = 0.5 \text{ MPa} \quad (5.4)$$

Quindi la tensione di sforzo normale risulta trascurabile rispetto alla tensione flessionale. Il coefficiente di sicurezza n vale perciò :

$$n = \frac{430}{65.83 + 0.5} = 6.48 > 6 \quad (5.5)$$

Il ciclo di fatica della tensione flessionale nel perno è pulsante, dato che il tiro F esercitato dai due rami della fune varia tra un minimo F_i di 2 130000 = 260000 N , ed un massimo F_s di 2 150000 = 300000 N . Tuttavia il coefficiente K vale :

$$K = \frac{1 + \frac{F_i}{F_s}}{2} = \frac{1 + \frac{260'000}{300'000}}{2} = 0.93 \quad (5.3)$$

un valore molto prossimo all'unità, per cui gli effetti della fatica sono insignificanti, e quindi la tensione critica a fatica è la tensione di snervamento del C40 .

e quindi, relativamente alla posizione nella sezione del perno più lontana dall'asse neutro, risulta verificata la condizione che il suo coefficiente di sicurezza sia maggiore od eguale a 6 .

La massima tensione di taglio vale :

$$\tau = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{\frac{d}{D} + \frac{D}{d}} \right) \frac{F}{A} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{\frac{120}{200} + \frac{200}{120}} \right) \frac{300'000}{\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}} = 28.67 \text{ MPa} \quad (5.6)$$

Si noti che in una sezione circolare piena la massima vale $4/3$ la media, mentre per una sezione circolare in parete sottile la massima vale il doppio della media. Per una sezione circolare cava di spessore non piccolo, si impiega l'espressione riportata nel Paragrafo sui richiami di geometria delle masse, derivata con Jourawski, ed impiegata nella (5.6) . Per la geometria di Figura 5.1 , tale coefficiente correttivo della media a dare la massima vale 1.92 , cioè è molto vicino al valore caratteristico di una sezione circolare cava in parete sottile.

La tensione massima agisce sull'asse neutro, dove la tensione flessionale si annulla, e quella di sforzo normale è trascurabile. Tralasciando appunto la tensione di sforzo normale, il coefficiente di sicurezza vale :

$$n = \frac{220}{28.67} = 7.67 > 6 \quad (5.7)$$

In realtà, il coefficiente di sicurezza effettivo è un po' inferiore a 7.67, dato che si è trascurata la tensione di sforzo normale. Per tener conto della presenza simultanea della tensione tagliente e di sforzo normale, occorre impiegare una formula di tensione ideale. Siccome i cicli di fatica della di sforzo normale e della sono gli stessi, si può impiegare una formula della tensione ideale per un caso piano incompleto e per carichi statici. Secondo Guest, si ha :

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \tau^2} = \sqrt{0.5^2 + 4 \times 28.67^2} = 57.34 \text{ MPa} \Rightarrow n = \frac{430}{57.34} = 7.50 \quad (5.8)$$

Secondo il lavoro di distorsione, si ha :

Error! Bookmark not defined.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} = \sqrt{0.5^2 + 3 \times 28.67^2} = 49.66 \text{ MPa} \Rightarrow n = \frac{430}{49.66} = 8.66 \quad (5.9)$$

Si noti che questo coefficiente di sicurezza, pur tenendo conto sia della di taglio che della di sforzo normale, è (lievemente) maggiore di quello calcolato nella (5.7) tenendo conto della sola . Questo risultato sorprendente deriva dal fatto che il rapporto tra i valori sperimentali della di snervamento e la di snervamento, $430/220 = 1.95$, è maggiore del valore del precedente rapporto implicito nella teoria del lavoro, che vale $3 = 1.73$. In altre parole, la teoria del lavoro di distorsione conferisce alla un peso un po' inferiore al valore sperimentale.

In alternativa all'impiego di tensioni ideali statiche, si possono adottare anche tensioni ideali affaticanti. Impiegando Guest o il lavoro di distorsione (le due formule coincidono), si ricava :

$$\left(\frac{\sigma}{\sigma_{crit}} \right)^2 + \left(\frac{\tau}{\tau_{crit}} \right)^2 = \left(\frac{0.5}{430} \right)^2 + \left(\frac{28.67}{220} \right)^2 = \frac{1}{n^2} \Rightarrow n = 7.67 \quad (5.10)$$

un valore numericamente indistinguibile dalla (5.8) , a causa del basso valore della di sforzo normale rispetto alla di taglio. Si noti che il coefficiente di sicurezza ottenuto tramite la (5.10) , essendo basato sui valori sperimentali delle tensioni critiche, non soffre delle contraddizioni incontrate applicando a casi affaticanti la (5.9) .

Si può comunque concludere che, relativamente alla posizione nell'intorno dell'asse neutro del perno, risulta verificata la condizione che il suo coefficiente di sicurezza sia maggiore od eguale a 6 .

Infine, la massima rotazione dell'estremità libera del perno, dovuta al tiro dei due rami della fune portante-traente, Figura 5.2 , vale :

$$\varphi = \frac{F l^2}{2 E J} = \frac{300'000 \times 150^2}{2 \times 210'000 \times \frac{\pi}{64} (200^4 - 120^4)} = 2.35 \times 10^{-4} \text{ rad} < 2 \times 10^{-2} \text{ rad} \quad (5.11)$$

Si conclude che il perno verifica la condizione che la rotazione della sua estremità libera, e quindi la rotazione del piano di traccia A - A di Figura 5.1 , sia minore di 10^{-2} radianti.

6 Esercizi proposti sulle tensioni ideali

6.1 Si considerino i quindici stati tensionali statici , in stato piano di tensione ed in stato tridimensionale, rappresentati in Figura 6.1.1 . Per ogni stato tensionale, si calcolino le tensioni ideali secondo la teoria della σ_{max} modificata, della σ_{max} , e del L_{dist} . In particolare, si verifichi se è garantita la resistenza secondo la σ_{max} modificata, con riferimento ad una allumina con tensione di rottura di 350 MPa , e se è garantita la resistenza secondo la σ_{max} ed il L_{dist} , con riferimento al C40 , con tensione di snervamento di 430 MPa . Per entrambi i materiali si calcoli inoltre il relativo coefficiente di sicurezza.

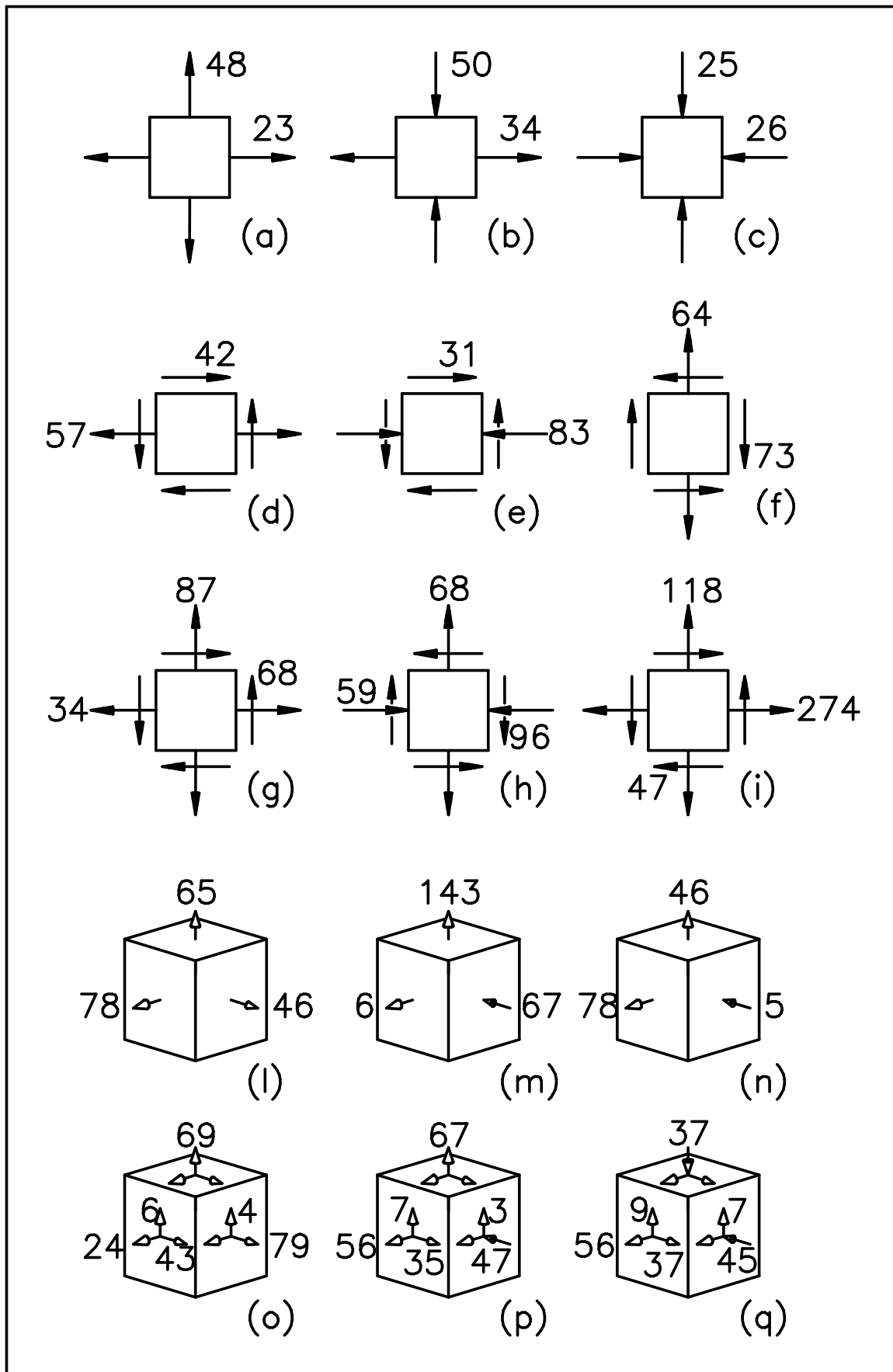


Figura 6.1.1

Error! Bookmark not defined.

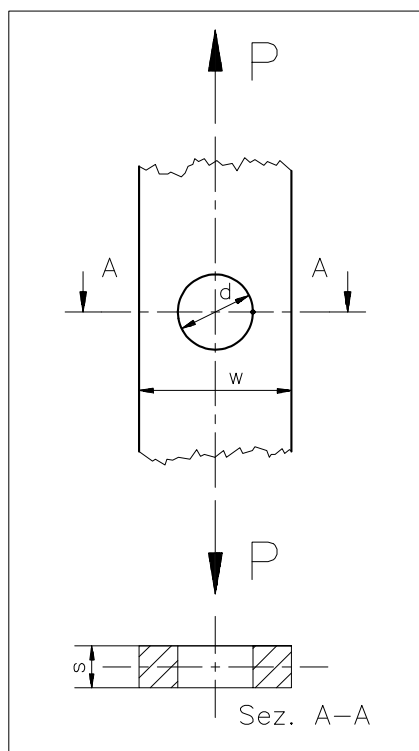


Figura 6.2.1

6.2 Si consideri la lastra forata di Figura 6.2.1 , soggetta a sforzo normale statico, e realizzata in 16CrNi4 ed in C40 . Si vuole valutare il coefficiente di sicurezza della lastra forata per $P = 8000 \text{ N}$, $d = 25 \text{ mm}$, $w = 40 \text{ mm}$, $s = 3 \text{ mm}$.

6.3 Si considerino i tre stati tensionali affaticanti esistenti nei tre alberi rotanti di Figura 6.3.1 , caratterizzati da una tensione di Momento flettente all'inversione, da una tensione compressiva di Sforzo normale statica, e da una tensione di Momento torcente statica. Per ognuno dei tre stati tensionali di Figura 6.3.1 , si vogliono calcolare le tensioni ideali secondo la teoria della σ_{max} e del L_{dist} . In particolare, si vuole verificare se è garantita la resistenza a tempo infinito dei tre alberi costruiti in 16CrNi4 ed in C40 , e si

vuole anche calcolare il coefficiente di sicurezza.

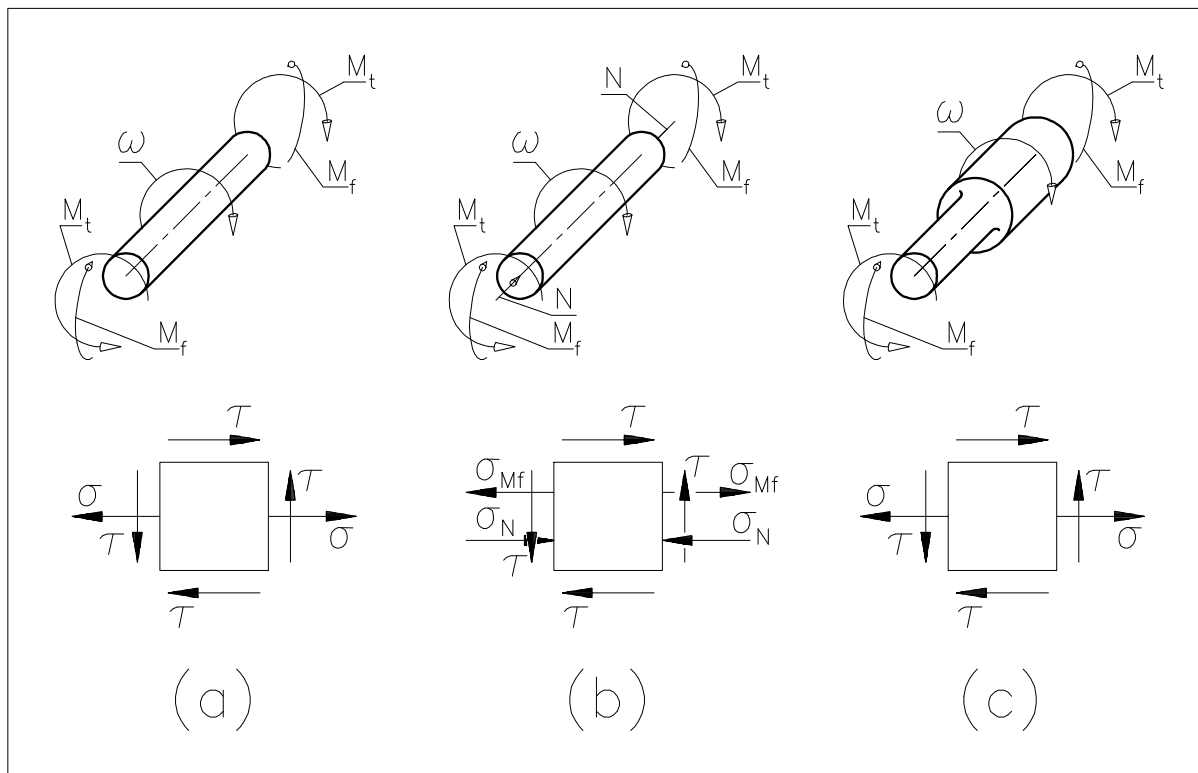


Figura 6.3.1

6.4 Si considerino i quindici stati tensionali affaticanti in stato piano di tensione ed in stato tridimensionale, rappresentati in Figura 6.4.1 . Per ogni stato tensionale, si calcoli la tensione ideale secondo la teoria del L_{dist} , ed il relativo coefficiente di sicurezza con riferimento al C40 , acciaio a comportamento duttile con $R_{s,flessione} = \sigma_{flessione} = 430$ MPa , $\sigma_{inv,flessione} = 280$ MPa , $\sigma_s = \sigma_o = 220$ MPa , $\sigma_{inv} = 160$ MPa .

6.5 Nella verifica a resistenza di una sezione di un componente meccanico realizzato in C40 , è stata impiegata la seguente formula:

$$\left(\frac{78}{280}\right)^2 + \left(\frac{27}{160}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Indicare sul quadrato elementare le tensioni agenti ed il loro ciclo di fatica.

6.6 Nella verifica a resistenza di una sezione di un componente meccanico realizzato in C40 , è stata impiegata la seguente formula:

$$\left(\frac{75}{280}\right)^2 + \left(\frac{22}{160} + \frac{17}{220}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

Indicare sul quadrato elementare le tensioni agenti ed il loro ciclo di fatica.

6.7 Nella verifica a resistenza di una sezione di un componente meccanico realizzato in C40 , è stata impiegata la seguente formula:

$$\left(\frac{70}{280}\right)^2 + \left(\frac{28}{430}\right)^2 + \frac{70}{280} \frac{28}{430} = \frac{1}{n^2}$$

Indicare sul quadrato elementare le tensioni agenti ed il loro ciclo di fatica. Discutere in particolare il segno + che precede il prodotto delle due frazioni al primo membro.

6.8 Disegnare in assonometria l'equivalente del diagramma di Westergaard, vedi la Figura 2.1.6.2 , per il caso triassiale completo, per le varie ipotesi di rottura statica.

6.9 Esaminare tutti i diagrammi di Goodman contenuti in questo testo, e determinare per quali diagrammi R_s costituisce una buona approssimazione della tensione di criticità all'origine.

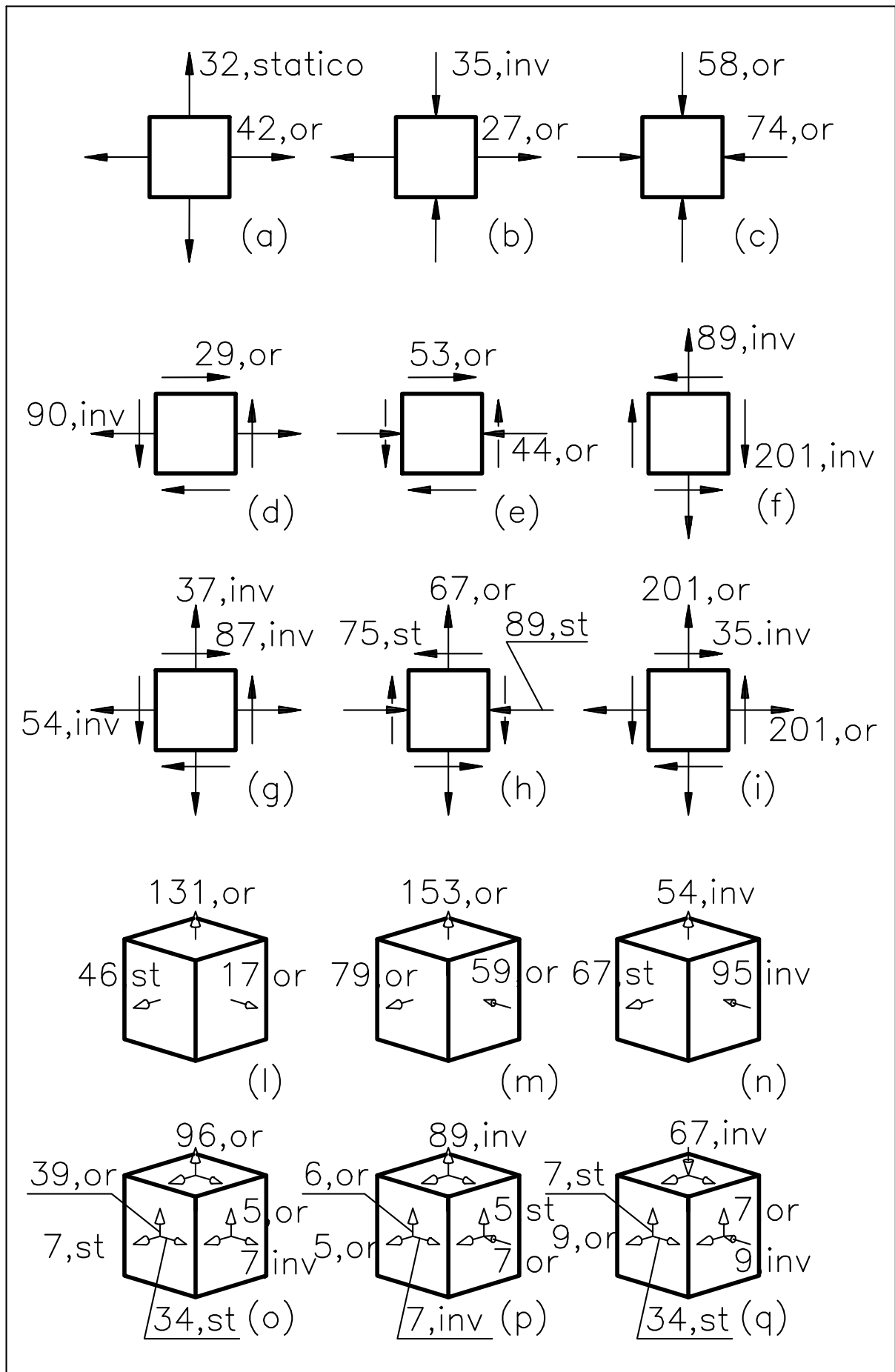


Figura 6.4.1

Error! Bookmark not defined.

6.10 Si considerino le formule delle tensioni ideali triassiali affaticanti, nelle quali si determina la tensione ideale delle parti medie e delle parti alterne dei vari cicli di tensione. In un testo si accenna ad un'altra possibile formulazione: *Formulas . . . can also be written by using the maximum- and minimum-stress components, but these will not produce the same results.* Inventarsi un esempio di stato tensionale triassiale affaticante, calcolare dapprima il ciclo ideale affaticante valutando, come al solito, la tensione ideale delle parti medie e delle parti alterne, e successivamente calcolando il ciclo ideale affaticante valutando la tensione ideale delle tensioni inferiori e delle tensioni superiori dei vari cicli affaticanti. Confrontare infine i risultati delle due procedure.

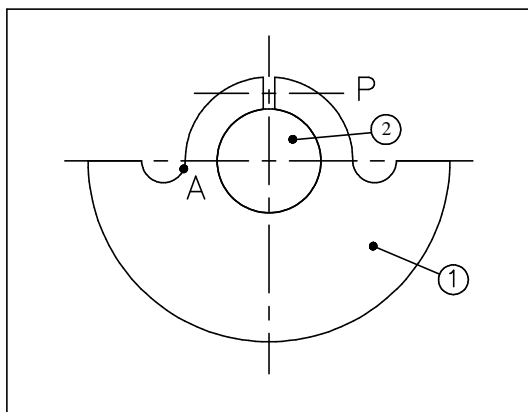


Figura 6.11.1

6.11 Si consideri l'eccentrico (1) di Figura 6.11.1, calettato sull'albero (2) tramite il tiro P esercitato da un bullone del quale è stato rappresentato soltanto l'asse. Tramite uno studio in tensione piana agli elementi finiti sull'effetto intaglio in prossimità del punto A , si è calcolata in tale punto una tensione ideale statica secondo Von Mises di 47 MPa. Quali informazioni si possono dedurre da tale

dato sulla direzione e sul valore delle tensioni principali in A ?

6.12 La seguente formula di tensione ideale e' corretta, oppure contiene una contraddizione? Commentare.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 + 3 \tau_{xy}^2}$$

6.13 La seguente formula di tensione ideale non ricade nelle formule classiche. Infatti tale formula contiene una contraddizione. Commentare.

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_1^2 + 2 \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

6.14 In una piastra realizzata in vetro, costituente un oblò in una apparecchiatura per la sterilizzazione di strumenti medicali, si sono calcolate, per un punto particolarmente sollecitato della piastra, tre tensioni principali di valori 45, 13, -72 MPa. Quanto vale la tensione ideale nel punto?

7 Libri contenenti capitoli sulla Tensione Ideale

Error! Bookmark not defined.

IURZOLLA, E. (1973). *Costruzione di macchine, i criteri di resistenza*. Libreria Cortina, Padova.

MASSA, E., BONFIGLI, L. (1975). *Costruzioni di macchine*. Vol. 1 , Tamburini Editore, Milano.

JUVINALL, R.C. , MARSHECK, K.M. (1993). *Fondamenti della progettazione dei componenti delle macchine*. ETS, Pisa.

PETRONE, N. (1996). *Metodologie di progettazione a fatica per componenti soggetti a sollecitazioni pluriassiali*. Tesi di Dottorato di Ricerca in Progetto e Costruzione di Macchine.

SHIGLEY, J.E. (1986). *Mechanical engineering design*. McGraw-Hill, New York.

8 Articoli sulla Tensione Ideale

JAEGER, J.C. and HOSKINS, E.R. (1966). *Rock failure under the confined Brazilian test*. Journal of Geophysical Research, Vol. 71, n.10 , pp. 2651-2659 .

MAIR, W.M. (1968). *Fracture criteria for cast iron under biaxial stress*. Journal of Strain Analysis, Vol. 3 , n.4, pp. 254-263.

?disegno col caso triassiale e monodimensionale

Discutere i segni delle tensioni anche nei casi piani affaticanti.

Si cita la Tabella 4.4.1 (e la Tabella 4.4.2) in vari punti di un esercizio. Questa è la tabella dell'effetto intaglio. (1) Va detto che la tabella è nel capitolo dell'effetto intaglio (2) va controllato il numero.

+Dire che il ciclo di fatica equivalente non può essere valutato calcolando la tensione ideale istante per istante, dato che un ciclo di fatica all'inversione diventerebbe all'origine.

+Dire che la sigam ideale è sempre positiva.

+mettere l'andamento dei piani di frattura. Se uso la taumax, non vuol dire che si spacca a 45 gradi.

+JAEGER, J.C. and HOSKINS, E.R. (1966). *Rock failure under the confined Brazilian test*. Journal of Geophysical Research, Vol. 71, n. 10, pp. 2651-2659. Un disco è schiacciato diametralmente, in modo da creare tensioni trattive al centro. E' una prova indiretta a trazione, nel senso che si impone una compressione al disco, ma in seguito a questa compressione si generano tensioni trattive, più pericolo se di quelle compressive, che quindi causano la frattura della roccia. (cemento, marmo) Determinazione della tensione di frattura.

Since the stresses are inhomogeneous, stress gradients exist which may well affect failure.

+non può venire condotto direttamente per via sperimentale, dato che per sollecitazioni triassiali si dovrebbe teoricamente prendere in esame gli effetti di tutte le possibili combinazioni delle tre tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

+Dire del gradiente di tensione, etak.

+dire che può darsi che la tensione ideale non esista, nel senso che dipende da troppi parametri, come il valore delle tensioni ed il loro gradiente.

+Il test sullo stato idrostatico è meno importante del controllo sul rapporto tra tensione critica σ_c ed σ_c dato che, come già notato, uno

+esercizio: disegnare Westergaard triassiale

+esercizio: determinare la differenza tra R_s e σ_c origine dai diagrammi sperimentali di Goodman.

+Citare tra i libri il Massa

Error! Bookmark not defined.

