

# FATICA

## 1 Generalità

Si parla di Fatica, di carichi affaticanti, di tensioni affaticanti, quando i carichi applicati ad un organo meccanico, e quindi le sollecitazioni, variano nel tempo. Questa oscillazione delle tensioni riduce la resistenza meccanica del materiale rispetto alle tensioni statiche. La Fatica studia appunto la resistenza dei materiali quando soggetti a tensioni affaticanti, e permette di chiarire se il componente meccanico, soggetto ad un certo ciclo di tensioni, resiste a tempo infinito, oppure dopo quanti cicli di fatica avviene il collasso del componente.

Molti organi meccanici sono soggetti, come conseguenza del loro movimento, a carichi affaticanti. Alberi di trasmissione, molle, bielle, spinotti, sono parti meccaniche nelle quali le tensioni variano nel tempo, e che quindi richiedono una progettazione che tenga conto della ridotta resistenza del materiale rispetto a carichi statici, cioè una progettazione a fatica.

La Fatica indaga vari aspetti: *A)* chiarisce quali sono i parametri dominanti che riassumono il ciclo affaticante delle tensioni; *B)* studia come rappresentare in diagrammi i dati sperimentali che descrivono la resistenza a fatica del materiale; *C)* mostra come entrare nei diagrammi di resistenza con i parametri riassuntivi del ciclo affaticante, per determinare se la resistenza del materiale è infinita o a tempo definito e, nel caso di resistenza infinita, quanto l'organo meccanico è in sicurezza rispetto al carico di collasso.

## 2 Parametri che riassumono il ciclo di fatica delle tensioni

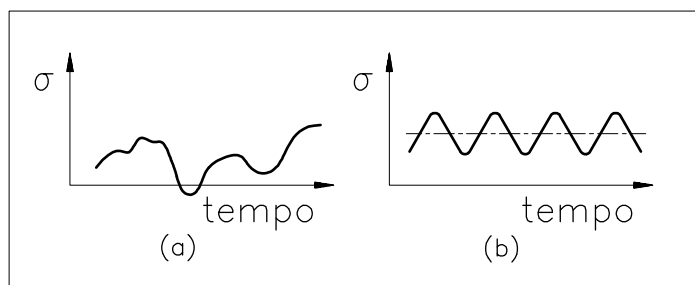


Figura 2.1

Benché la legge di variazione del carico o delle tensioni nel tempo possa essere in alcuni casi reali del tutto casuale, nelle situazioni di pratico interesse il carico varia spesso in maniera ripetitiva, cioè ciclica nel tempo, almeno per certi tratti.

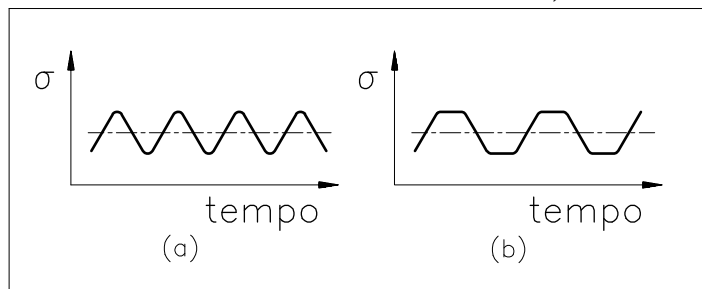
Per esempio, i carichi che agiscono sulle maglie di una macchina

movimento terra dipendono fortemente dagli ostacoli frapposti dal suolo, incontrati dalla macchina nei suoi movimenti, e quindi variano in modo non ripetitivo. Invece un albero di trasmissione è spesso soggetto ad una coppia torcente ed a carichi abbastanza costanti, per cui il ciclo delle tensioni flessionali risulta sufficientemente regolare nel tempo. La Figura 2.1 descrive a) un andamento irregolare delle tensioni nel tempo, e b) un ciclo stabile nel tempo.

La situazione più semplice da trattare, ed anche forse la più frequente, è quella di ciclo (abbastanza) costante nel tempo. In questo testo si esaminerà soltanto il caso di ciclo costante nel tempo. Nel seguito si indaga quali parametri riassumono un ciclo di fatica delle tensioni stabile nel tempo.

Da un punto di vista teorico il ciclo di fatica è determinato completamente 1) dalla forma del ciclo; 2) dalla ampiezza; 3) dalla frequenza.

Relativamente al punto 1), ci si è resi conto sperimentalmente che la forma del ciclo è ininfluente. In pratica, il ciclo di fatica è spesso di tipo sinusoidale. Infatti il caso più frequentemente incontrato di organi soggetti a fatica è quello di albero rotante, nel quale l'oscillazione delle tensioni flessionali deriva dalla rotazione dell'albero, e quindi possiede un andamento sinusoidale nel tempo. La Figura 2.2 illustra due cicli di fatica con forme diverse di onde, ma che oscillano tra lo stesso minimo e massimo di tensione. Tali cicli, sebbene con onde di forma diversa,



producono lo stesso danneggiamento del materiale. Questi cicli sono quindi equivalenti dal punto di vista della resistenza a fatica.

Figura 2.2

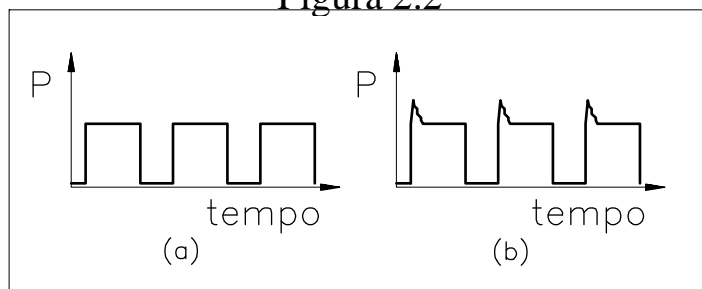


Figura 2.3

Un caso in cui la forma dell'onda sembra apparentemente influire sulla resistenza a fatica è quello di un'onda approssimativamente rettangolare, che per esempio deriva da un processo di imbutitura, Figura 2.3. Il carico  $P$  nel punzone della pressa è nullo prima del contatto con la lamiera, e poi assume di colpo un valore di inizio imbutitura che, per semplicità viene

rappresentato come costante durante la corsa di imbutitura. In realtà il carico nel punzone raggiunge, al primo contatto con la lamiera, un valore di picco di tipo impulsivo che la strumentazione della pressa difficilmente riesce a rilevare. In altre parole, il carico iniziale effettivo è maggiore di quanto appare dai diagrammi sperimentali. La Figura 2.3 a) rappresenta l'andamento nel tempo del carico  $P$  come appare dai diagrammi, e la b) l'andamento effettivo. In questi casi, un calcolo a fatica basato sui carichi della Figura a) sottostima le tensioni e quindi è a sfavore della sicurezza. In questo esempio la forma dell'onda sembra apparentemente influente, ma solo perché il diagramma su cui si basano i calcoli non è rappresentativo delle tensioni reali.

Relativamente al punto 2), l'ampiezza del ciclo è caratterizzata dalla tensione inferiore,  $i$ , e superiore,  $s$ , oppure dalla tensione media,  $m = (i + s)/2$ , e dalla tensione alterna  $a = (s - i)/2$ . Solo due di questi quattro valori sono indipendenti. Questi simboli sono chiariti in Figura 2.4.

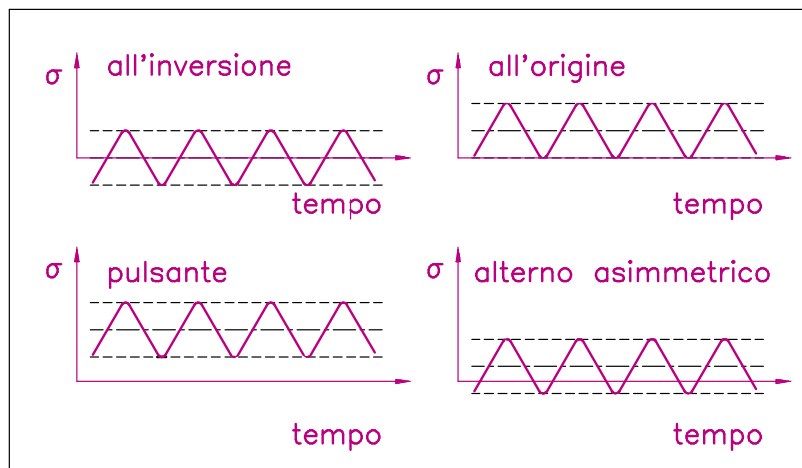


Figura 2.5

La Figura 2.5 illustra invece la terminologia essenziale dei cicli di fatica. Se un ciclo si sviluppa tra un valore positivo ed uno negativo di eguale modulo, se cioè  $s = -i$ , il ciclo si dice "all'inversione" oppure "alterno simmetrico". Se  $s$

oppure  $i$  è nullo, il ciclo si dice "all'origine". Se  $s$  e  $i$  hanno lo stesso segno, il ciclo si dice "pulsante". Se infine  $s$  e  $i$  hanno segni e moduli diversi, il ciclo si dice "alterno asimmetrico".

Circa il punto 3), relativo alla frequenza, si è visto sperimentalmente che nei materiali metallici i cicli di fatica aventi frequenze maggiori di  $(5 - 8) \cdot 10^3$  cicli/minuto causano due effetti tra loro contrastanti, uno che riduce la resistenza meccanica, ed uno che la aumenta, anche se di poco. Il primo effetto, negativo, deriva dal fatto che frequenze elevate producono, a causa dell'isteresi del materiale, un riscaldamento del metallo, che altera e quindi compromette le caratteristiche meccaniche del materiale. Il secondo effetto, positivo ma di moderata entità, è il ritardo con cui la tensione del materiale segue la sollecitazione esterna. Questo ritardo produce effetti favorevoli

sulla resistenza a fatica, anche se contenuti. L'effetto complessivo di un aumento della frequenza è di ridurre la resistenza del materiale.

Per una corretta applicazione dei dati usuali sulla resistenza a fatica, la frequenza deve quindi essere minore di  $(5 - 8) \cdot 10^3$  cicli/minuto, e tale limite non è influenzato da eventuali soste della macchina.

Si consideri un motore automobilistico di una utilitaria. I giri del motore possono raggiungere circa 6000 giri/minuto, causando frequenze dei cicli di fatica nell'albero a gomito di 6000 cicli/minuto. Si può concludere che, nel caso di motori non da competizione, le frequenze non producono un sensibile innalzamento della temperatura del metallo, non compromettendo la sua resistenza meccanica.

Se la frequenza è superiore ai valori indicati (si parla di macchine ad altissima frequenza), occorrerà tener opportunamente conto della riduzione di resistenza meccanica.

*È da sapersi che Alfonso I d'Este ad onta del nobile ingegno, e delle ottime disposizioni del cuore, non aveva, qualunque ne fosse la cagione, sortita quella educazione che più si conviene a chi è destinato al soglio. Egli non pur vivente il padre, ma ne' primi mesi ancora del suo governo si occupava spesso entro segreta bottega domestica in lavorare al torno, alla ruota figulinaria, alla fonderia de' metalli, alle manifatture di acciaio, e ad altre simili meccaniche fatiche.*

A. Frizzi, Memorie per la Storia di Ferrara, Vol. IV.

### 3 Diagrammi di resistenza a fatica

Mentre nel caso di carico statico la tensione critica è lo snervamento o la rottura a seconda che il materiale sia duttile o fragile, quando il carico è affaticante occorre individuare, tramite indagine sperimentale, la tensione critica in relazione al particolare tipo di ciclo. Tale tensione critica affaticante sarà in genere minore della tensione critica statica, e tanto minore quanto più nocivo è il tipo di ciclo. Per rompere con le mani un filo di ferro, lo si piega prima in un senso e poi in un altro. Questo indica, come confermato dai diagrammi di resistenza a fatica, che **il ciclo peggiore è quello all'inversione**.

Sono stati codificati due tipi di calcoli, uno a durata infinita ed uno a tempo determinato, a seconda delle esigenze funzionali e della normativa vigente. Per esempio, un albero di trasmissione viene in genere calcolato a tempo infinito, mentre alcuni componenti meccanici impiegati in auto da gara (per esempio parti del cambio) possono venire progettati per durare il tempo della gara.

Teoricamente il secondo calcolo, a tempo determinato, abbraccia il primo approccio, a durata infinita, dato che basta scegliere un tempo determinato di valore molto alto per simulare il primo tipo di calcolo tramite il secondo tipo. In pratica però i due tipi di calcoli, e quindi i due tipi di diagrammi che riportano i valori sperimentali della tensione critica, vengono tenuti distinti. Le ragioni sono fondamentalmente due: a) i diagrammi a vita infinita sono noti per un numero sufficiente di materiali metallici, mentre quelli a durata limitata sono molto più rari; b) il calcolo a durata infinita è più comune del calcolo a durata finita.



Benché i dati sperimentali indichino una resistenza a fatica infinita anche per tensioni lievemente superiori allo snervamento, la parte alta del diagramma di Goodman viene generalmente troncata in corrispondenza di  $R_s$  perché, se  $s$  è maggiore di  $R_s$ , nel componente meccanico si originano delle deformazioni residue che compromettono il suo corretto funzionamento, specie se l'organo è rotante. Si pensi ad un albero a gomito, ed alle sovrassollecitazioni che una sua distorsione, anche contenuta, provoca sugli appoggi e quindi sui perni.

Per cicli di fatica rappresentati dalla coppia di valori  $s, m$  per cui la cui  $s$ , (e quindi anche la  $i$ , a causa della simmetria del diagramma) cade all'interno del diagramma, la resistenza è a tempo illimitato; per  $s$  esterno al contorno si ha invece rottura, anche se il diagramma di Goodman non è in grado di indicare dopo quanti cicli avviene il collasso. Se infine la tensione superiore cade in vicinanza del contorno, si è in una situazione di transizione, per cui non è possibile dedurre dal diagramma di Goodman se il materiale resiste o collassa.

Punti importanti del diagramma di Goodman sono quelli che descrivono la tensione critica di cicli all'inversione ed all'origine, che rappresentano i due cicli affaticanti più frequentemente incontrati nella pratica ingegneristica. La tensione critica all'inversione è rappresentata dal punto  $I_s$ , dato che il corrispondente valore sull'asse  $x$ , che riporta la tensione media, è 0, elemento caratteristico di un ciclo all'inversione. Similmente il punto  $I_i$  rappresenta la tensione inferiore di un ciclo all'inversione al limite del collasso. Per la simmetria del diagramma,  $I_s = -I_i$ . In conclusione, la coppia di punti  $I_s, I_i$ , cadendo sul contorno del diagramma di Goodman, rappresenta un ciclo al limite di resistenza infinita. Inoltre, dato che tale ciclo possiede una tensione media nulla, è all'inversione. Quindi questo ciclo rappresenta il più grande ciclo all'inversione, al limite della resistenza infinita.

La tensione critica all'origine è rappresentata dalla coordinata  $y$  del punto  $O_s$ , in corrispondenza del quale il punto  $O_i$  assume valore nullo, elemento caratteristico del ciclo di fatica all'origine. La coppia di punti  $O_s, O_i$  rappresenta il più grande ciclo all'origine, al limite di resistenza infinita. Dato un diagramma di Goodman, per individuare la tensione critica all'origine, si traccia una retta verticale a partire dal punto  $O_i$  dove il lato inferiore del diagramma di Goodman interseca l'asse  $x$ . La coordinata  $y$  del punto di intersezione di questa retta verticale col lato superiore del diagramma di Goodman rappresenta la tensione critica all'origine.

La Figura 3.1.1 presenta un diagramma di Goodman, evidenziando le variabili lungo l'asse  $x$  ed  $y$ , i dati sperimentali e l'approssimazione del contorno con una spezzata, la simmetria del diagramma rispetto ad una

direzione verticale, l'angolo di inclinazione del lato superiore di  $43^\circ$ , il taglio della zona superiore del diagramma in corrispondenza dello snervamento  $R_s$ , e la tensione critica all'inversione ed all'origine.

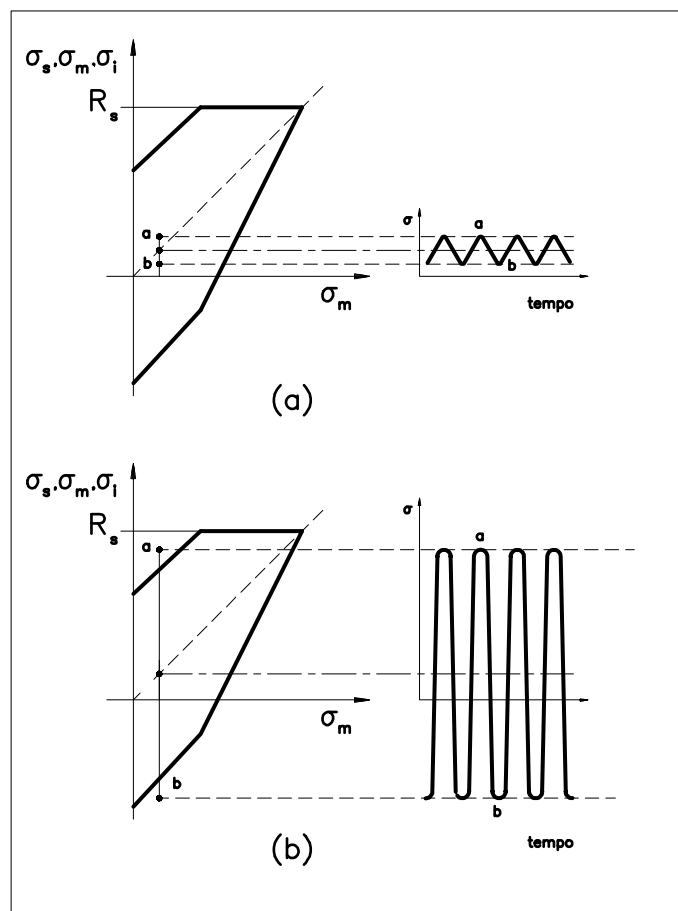


Figura 3.1.2

rispetto alla trazione. Se quindi un ciclo di fatica si sviluppa essenzialmente per valori negativi della tensione, cioè se la sua  $m$  è negativa, esso risulta meno pericoloso di un ciclo ottenuto per ribaltamento attorno all'asse  $= 0$ , Figura 3.1.3. Ci si può quindi sempre ricondurre al caso  $m = 0$ , con un'approssimazione a volte drastica, ma comunque a favore della sicurezza.

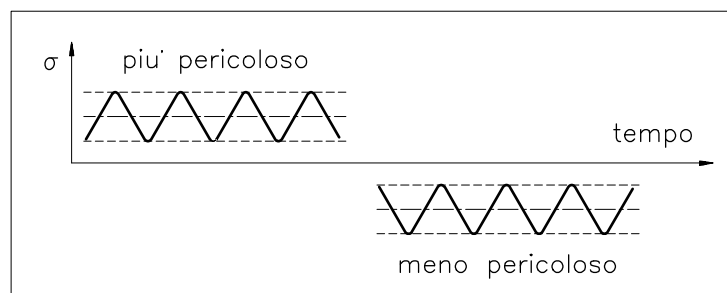


Figura 3.1.3

La Figura 3.1.2 presenta un diagramma di Goodman, e due cicli di fatica, il ciclo a) che garantisce durata illimitata, ed il ciclo b) che produce il collasso dopo un tempo finito.

Si osservi inoltre che i diagrammi di Goodman vengono generalmente riportati soltanto per  $m = 0$ , mentre è difficile trovare diagrammi tracciati anche per tensioni medie negative. Questa scelta permette di dimezzare le prove sperimentali necessarie alla definizione del diagramma di Goodman, e trova la sua giustificazione nella considerazione che i materiali metallici resistono meglio a tensioni di compressione

Si osserva infine che la dispersione dei dati sperimentali sulla resistenza a fatica è notevole, per cui il calcolo a fatica andrebbe a rigore interpretato in senso probabilistico. In genere i diagrammi di Goodman



sono riportati al 50% di sopravvivenza. Questo implica che i calcoli effettuati sono corretti al 50% dei casi. Nel rimanente 50% i calcoli sono errati, ma l'errore commesso sarà generalmente tollerabile. Per esempio, un pezzo meccanico soggetto ad un ciclo di tensione all'inversione di valore apprezzabilmente inferiore alla tensione critica all'inversione (e questo per non cadere proprio sul contorno del diagramma di Goodman), per esempio dell'ordine del 90% della tensione critica all'inversione, dovrebbe avere una vita infinita. A causa della dispersione dei dati sperimentali, può accadere che il provino ceda per esempio dopo un numero di cicli pari a  $7 \cdot 10^5$ , cioè comunque dopo una vita abbastanza lunga. Si cerca di ovviare a questi problemi tramite il coefficiente di sicurezza, spesso di valore 2.

Le Figure seguenti riportano diagrammi di Goodman per diversi acciai e per una ghisa. Si noti che i diagrammi di sforzo normale e di flessione sono simili (quello di flessione è un poco maggiore), mentre il **diagramma di torsione è circa in scala 0.5 rispetto a quello flessionale**.

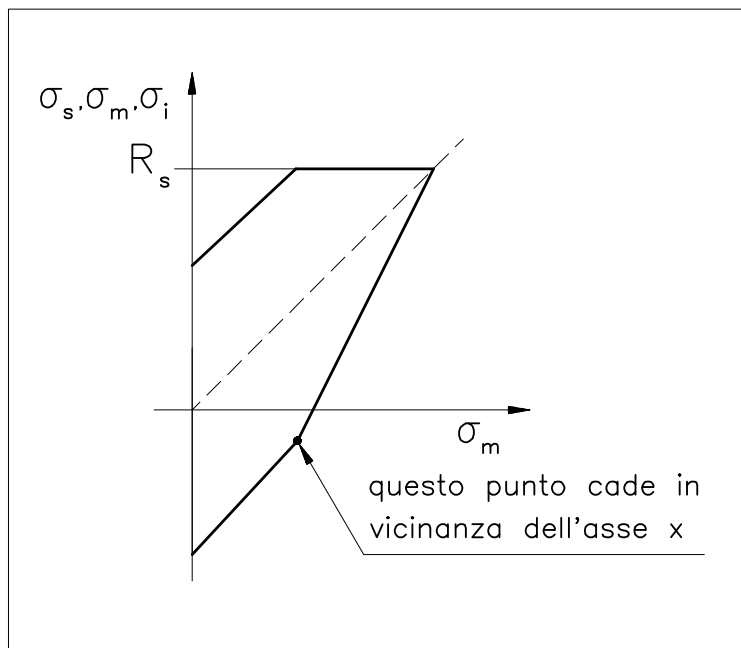


Figura 3.1.4

Le osservazioni che seguono discutono la diminuzione di resistenza del materiale rispetto ad un caricamento statico, causata da cicli tensionali affaticanti. Si ricorda che la tensione critica all'origine si ottiene dal diagramma di Goodman tracciando una retta verticale a partire dal punto in cui il contorno inferiore del diagramma di Goodman interseca l'asse  $x$ . La coordinata  $y$  in corrispondenza della

intersezione tra la predetta retta verticale ed il contorno superiore del diagramma di Goodman rappresenta la tensione critica all'origine. Ora i vari diagrammi di Goodman qui presentati mostrano che il punto di congiungimento delle due rette che descrivono il contorno inferiore del diagramma di Goodman cade in genere abbastanza vicino all'asse  $x$ , Figura 3.1.4. Si vedano in particolare i diagrammi di Goodman per il C20, C30, C40. Se tale punto sta sotto l'asse  $x$ , la tensione critica all'origine coincide con la tensione di snervamento. Anche se tale punto cade sopra l'asse  $x$ , ma è ancora sufficientemente vicino all'asse, la tensione critica

all'origine risulta di poco inferiore alla tensione di snervamento. Di conseguenza, per cicli di fatica compresi tra ciclo all'origine e ciclo statico, la tensione critica è lo snervamento od un valore di poco inferiore. Se invece il ciclo di fatica è compreso tra origine ed inversione, la tensione critica è sensibilmente inferiore allo snervamento. Si può anche dire che **la fatica produce una diminuzione della resistenza del materiale rispetto a tensioni statiche solo per cicli compresi tra inversione ed origine**. Per cicli compresi tra origine e tensione statica la tensione critica a fatica coincide di fatto con lo snervamento, e quindi non riduce la resistenza del materiale rispetto a tensioni statiche.

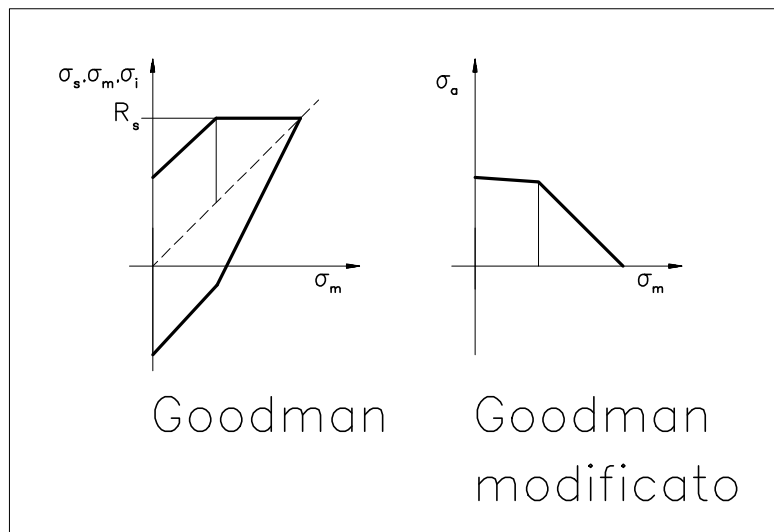


Figura 3.1.5

Si accenna nel seguito ad una rappresentazione alternativa dei dati contenuti nel diagramma di Goodman. Si è già notato che il diagramma di Goodman è simmetrico, lungo una direzione verticale, rispetto ad una retta a 45°, la quale rappresenta  $m$  contro se stessa. Si deduce quindi che i messaggi forniti dalla

parte di diagramma di Goodman compresa tra la retta a 45° ed il contorno inferiore, sono già contenuti nella parte di diagramma compresa tra il contorno superiore e la retta a 45°. In altre parole, i dati di criticità sono rappresentati due volte nel diagramma di Goodman. Si possono allora rappresentare i dati del diagramma di Goodman in modo più compatto, eliminando cioè la parte ripetuta del diagramma, riportando lungo l'asse  $x$  la  $m$  e lungo l'asse  $y$  la  $a$ , Figura 3.1.5. Questo diagramma è spesso chiamato "di Goodman modificato", anche se tale terminologia non è ben unificata, ed è meno diffuso di quello di Goodman.

Si osserva infine che nel caso di cuscinetti a rotolamento e di saldature si ammette, con motivazioni diverse, che la durata a fatica non possa essere infinita.

### 3.1.1 Alcune osservazioni sul diagramma di Goodman

La forma del diagramma di Goodman suggerisce alcune osservazioni, che risultano più chiare considerando un diagramma di Goodman idealizzato. Si nota che il contorno superiore inclinato del diagramma di Goodman reale è inclinato poco meno di  $45^\circ$ , e che i punti A

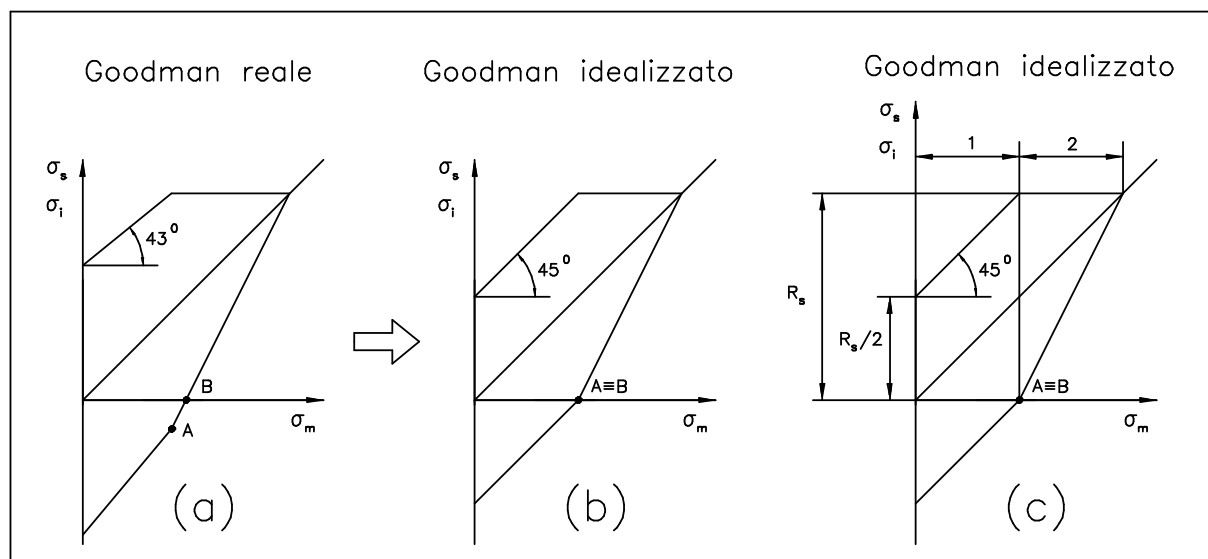


Figura 3.1.1.1

e B di Figura 3.1.1.1 (a) sono spesso vicini, almeno negli acciai al solo carbonio. Per evidenziare le caratteristiche del diagramma di Goodman reale, si considera un diagramma di Goodman idealizzato, nel quale il lato superiore è inclinato esattamente di  $45^\circ$ , ed i punti A e B coincidono, come mostrato in Figura 3.1.1.1 (b). Come appare dalla Figura 3.1.1.1 (c), nel diagramma di Goodman idealizzato la tensione di criticità all'inversione, che descrive la tensione superiore  $\sigma_s$  di un ciclo che cade sul contorno di Goodman ed è definito da  $\sigma_m=0$ , vale la metà della tensione di snervamento, e cioè  $R_s/2$ . Il diagramma appare inoltre formato da due zone distinte 1 e 2 indicate in Figura 3.1.1.1 (c), dove un ciclo al limite di criticità che cade nella zona 1 è del tipo alterno asimmetrico, mentre un ciclo al limite di criticità che cade nella zona 2 è pulsante. La Figura 3.1.1.2 mostra infatti due cicli di fatica critici che cadono rispettivamente nelle zone 1 e 2. In particolare, le Figure 3.1.1.2 (a) e (b) rappresentano un diagramma di Goodman idealizzato ed un ciclo di fatica critico definito dai punti C e D. Si nota che, quando il ciclo critico cade nella zona 1, tale ciclo è alterno asimmetrico (i casi di ciclo alterno simmetrico e pulsante rappresentano situazioni limite). Inoltre l'ampiezza di un ciclo di fatica critico che cade nella zona 1 deve eguagliare  $R_s$ , cioè la tensione alterna  $\sigma_a$  eguaglia  $R_s/2$ . Le Figure 3.1.1.2 (c) e (d) rappresentano invece un diagram-

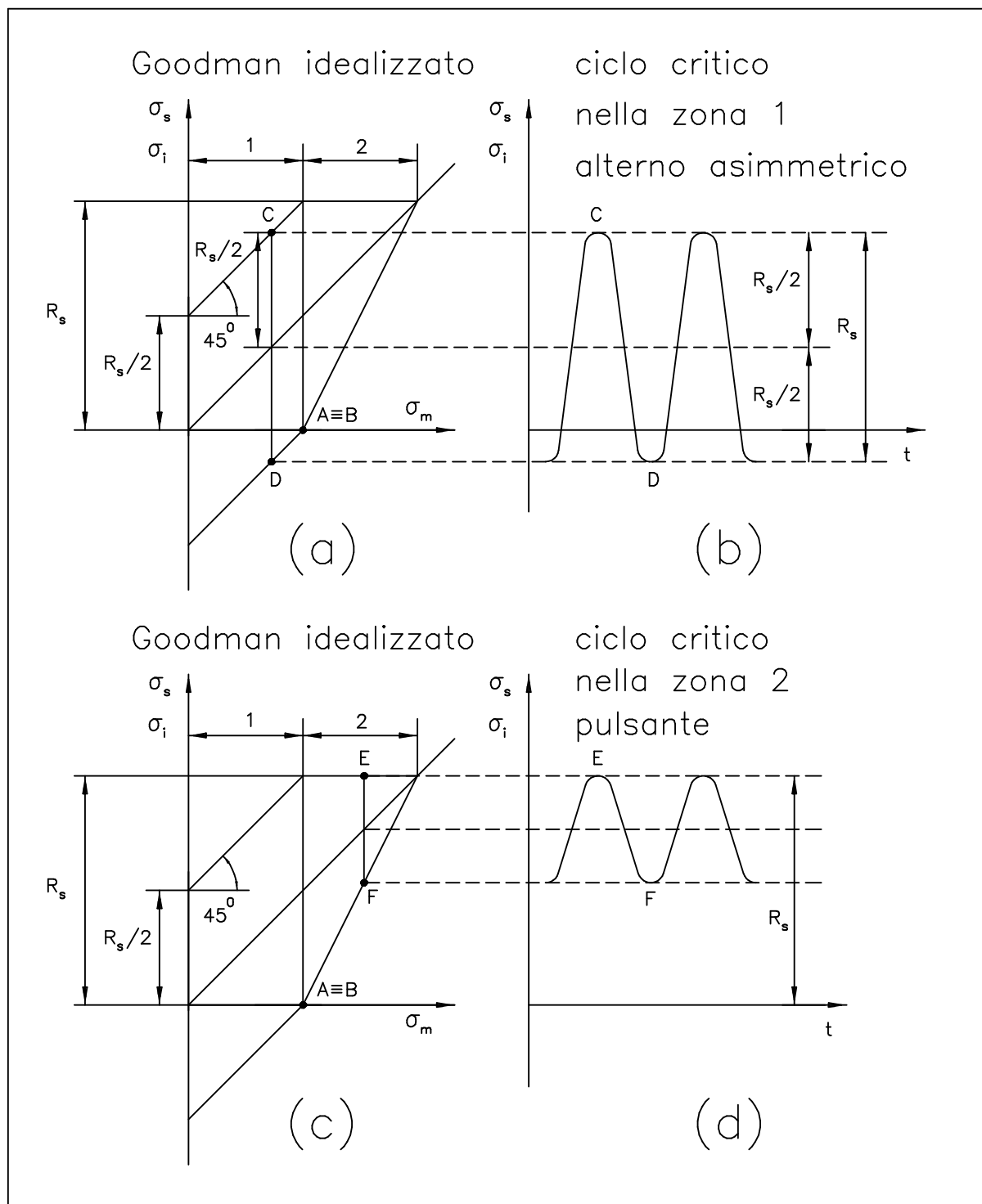


Figura 3.1.1.2

ma di Goodman idealizzato ed un ciclo di fatica critico definito dai punti *E* ed *F*. Tale ciclo cade nella zona 2 ed è quindi pulsante (il caso di ciclo all'origine rappresenta una situazione limite), dove la sua tensione superiore  $\sigma_s$  eguaglia  $R_s$ . In altre parole, se valesse il diagramma di Goodman idealizzato, nel caso di ciclo alterno asimmetrico, tale ciclo sarebbe critico se la tensione alterna  $\sigma_a$  eguagliasse  $R_s/2$ , mentre nel caso

di ciclo pulsante tale ciclo sarebbe critico se la tensione superiore  $\sigma_s$  eguagliasse  $R_s$ .

Viene così confermata una osservazione presentata nel Paragrafo 3.1, secondo la quale la fatica produce una diminuzione della resistenza del materiale rispetto a tensioni statiche solo per cicli alterni, e cioè compresi tra inversione ed origine. Infatti per cicli pulsanti, e cioè compresi tra origine e tensione statica, la tensione critica a fatica coincide di fatto con lo snervamento, e quindi non riduce la resistenza del materiale rispetto a tensioni statiche.

Le osservazioni precedenti valgono rigorosamente soltanto per un diagramma di Goodman idealizzato. Per un diagramma di Goodman reale, le considerazioni precedenti vanno intese in senso soltanto approssimato. Si può comunque concludere che, **per cicli alterni comanda la tensione alterna  $\sigma_a$**  (cioè la tensione alterna è il parametro più importante), **mentre per cicli pulsanti comanda la tensione superiore  $\sigma_s$** .

Per saggiare di quanto il diagramma di Goodman idealizzato si discosta da quello reale, si nota che la tensione di criticità all'inversione per il ciclo di Goodman idealizzato vale la metà della tensione di snervamento,  $R_s/2$ . Ci si riferisce ad un acciaio C40, per il quale la tensione flessionale di snervamento,  $R_s$ , vale 430 MPa. La tensione di criticità all'inversione dovrebbe quindi valere  $R_s/2 = 215$  MPa, mentre il valore corretto è 280 MPa, apprezzabilmente maggiore di quello idealizzato.

### 3.2 Diagrammi di resistenza a fatica a durata finita

Ci si riferisce anche in questo caso ad uno stato di **tensione monoassiale**. Il diagramma più comune è quello di **Wöhler**, e permette di effettuare una progettazione a tempo definito, Figura 3.2.1 . Esso riporta

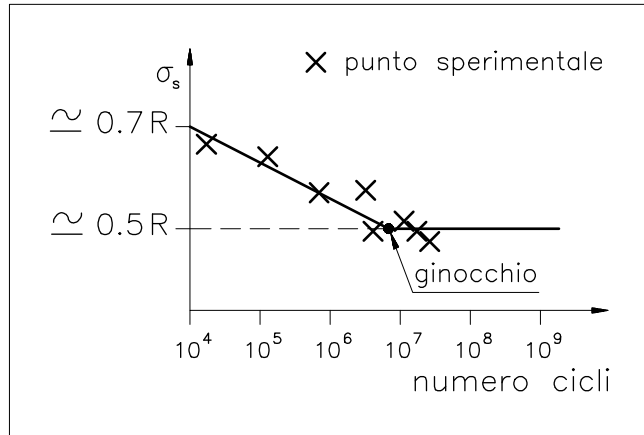


Figura 3.2.1

infatti in ascissa il numero di cicli (e non il numero di cicli/minuto, dato che il tempo non è una variabile rilevante in Fatica, essendo la frequenza non determinante), in scala logaritmica, ed in ordinata la tensione critica che collassa il provino dopo quel numero di cicli, per un particolare tipo di ciclo (all'origine, all'inversione, ecc.). Il simbolo  $s$  dell'asse y sta

per "tensione superiore" del ciclo affaticante, e non per tensione di snervamento. L'incontro tra il tratto inclinato della curva di Wöhler e l'asse y tirato a  $10^4$  cicli avviene a circa  $0.7 R$ , dove  $R$  rappresenta la tensione di rottura statica, mentre la zona orizzontale della curva di Wöhler cade a circa  $0.5 R$ . Ci si riferisce alla rottura e non allo snervamento dato che la rottura per fatica è fragile e non duttile, mentre lo snervamento quantifica la tensione di plasticizzazione del materiale. La scala dell'asse y viene nella maggioranza dei test assunta come naturale, ma è anche stata proposta una scala logaritmica. La dispersione dei dati sperimentali è comunque tale che nessuna delle due scelte di scale possiede vantaggi evidenti.

Sfortunatamente, gli unici diagrammi di Wöhler praticamente rintracciabili sono relativi a cicli all'inversione, la cosiddetta flessione rotante, per cui nel resto ci si riferirà soltanto a cicli alterni simmetrici.

Nel seguito si esamina il diverso comportamento di materiali ferrosi rispetto agli altri metalli. Nel caso di provini ferrosi si è notato sperimentalmente che, se un provino non cede dopo  $6 \cdot 10^6$  cicli (si ricorda che si parla di cicli e non di cicli/minuto) non cede più. Esiste quindi il cosiddetto "**ginocchio**", a destra del quale la curva di Wöhler diventa orizzontale, ad esprimere una vita infinita. La tensione critica del ginocchio è la tensione critica all'inversione (anche chiamata "limite di fatica", ma è più chiaro chiamarla "limite di fatica all'inversione", senza cioè dare per scontato che il ciclo di fatica è all'inversione), lo stesso dato che compare nel diagramma di Goodman, dato che corrisponde ad una durata infinita.

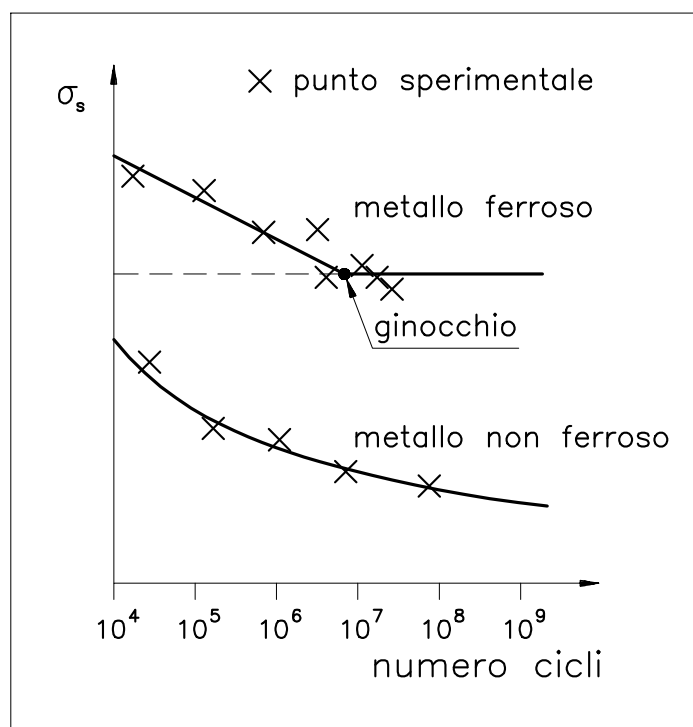


Figura 3.2.2

(Alcuni testi ritengono invece che il ginocchio cada a  $10^6$  cicli, altre fonti (come le ferrovie inglesi) a  $10^7$  cicli.)

A sinistra del ginocchio, invece, la curva di Wöhler per materiali ferrosi non è orizzontale ma inclinata, ma è comunque linearizzabile. L'origine dell'asse  $x$ , a causa della scala logaritmica, non può essere in coincidenza di 0 cicli, ma deve essere scelta in modo fittizio. Di solito si traccia il diagramma a partire o da  $10^3$ , o meglio da  $10^4$  cicli. La retta a sinistra del

ginocchio assume, per  $10^3$  cicli, un valore vicino a  $0.9 R$  (cioè il 90% della tensione di rottura), mentre per  $10^4$  cicli il valore assunto è vicino a  $0.7 R$ .

Un altro parametro praticamente rilevante è il **rapporto di fatica**, che rappresenta il rapporto tra tensione critica all'inversione (cioè il limite di fatica all'inversione) e tensione di rottura. Tale rapporto **vale, per gli acciai di comune impiego, circa 0.5**. I dati precedenti possono essere di guida nella costruzione di un diagramma di Wöhler per flessione rotante abbastanza accurato, a partire dal solo dato di resistenza a rottura. Basta infatti far cadere il ginocchio in un punto di coordinata  $x = 6 \cdot 10^6$  cicli,  $y = 0.5 R$ , e far partire la retta a sinistra del ginocchio dal punto di coordinate  $x = 10^3$  cicli,  $y = 0.9 R$ . La Figura 3.2.1 rappresenta il diagramma di Wöhler per un materiale ferroso.

Si accenna ora ai metalli non ferrosi, per esempio le leghe di alluminio. Per tali materiali i dati sperimentali non mostrano l'esistenza di un ginocchio, ma la curva di Wöhler decresce continuamente al crescere del numero di cicli, sicché non è strettamente possibile progettare un organo meccanico in metallo non ferroso a durata infinita. La Figura 3.2.2 confronta i diagrammi di Wöhler per un materiale ferroso e per uno non ferroso. La Figura 3.2.3 mostra il diagramma di Wöhler per leghe di Al-Cu-Mg. Emerge l'assenza del ginocchio.

Si ritorna ora ai materiali ferrosi. Se il provino cede prima di  $10^4$  cicli, si è in presenza di fatica oligociclica, campo aperto ed ancora in evoluzione. Si noti che il diagramma di Wöhler parte in genere da  $10^4$

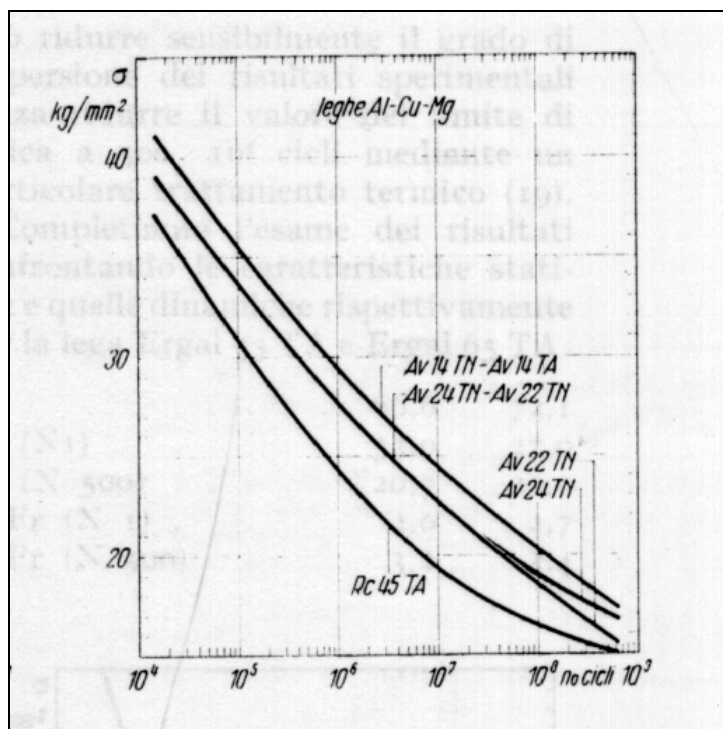


Figura 3.2.3

tensione superiore è maggiore del limite di fatica all'inversione (e minore di 0.7 volte lo snervamento, in modo da cadere nel campo della fatica classica ed evitare la fatica oligociclica), il diagramma di Wöhler permette di determinare il numero di cicli (e non di cicli/minuto !) del pezzo prima di arrivare a rottura. La Figura 3.2.4 illustra la determinazione del numero di cicli a rottura per un certo ciclo di fatica all'inversione.

In conclusione, una progettazione a tempo per meno di  $10^4$  cicli è problematica perché si è in presenza di fatica oligociclica; una progettazione a tempo per un numero di cicli compreso tra  $10^4$  e  $10^6$  cicli è realizzabile perché i dati sperimentali sono esaurientemente contenuti nel diagramma di Wöhler; una progettazione a tempo per un numero di cicli maggiore di  $10^6$  non ha senso perché, se il provino resiste a  $10^6$  cicli, resiste all'infinito.

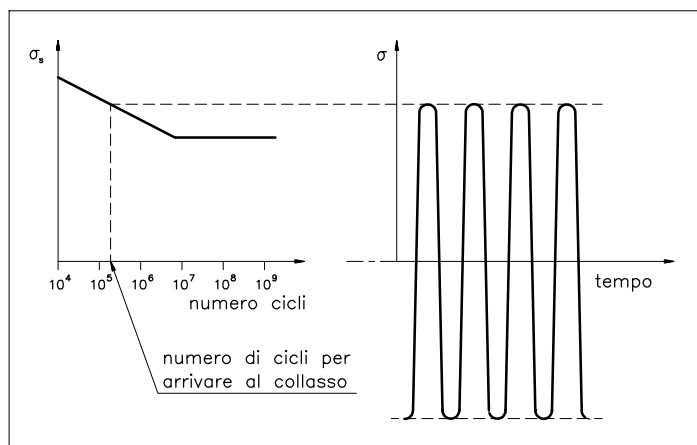


Figura 3.2.4

cicli, cioè non include la zona relativa alla fatica oligociclica. In questo testo ci si limita alla fatica classica, ignorando la fatica oligociclica.

Il diagramma di Wöhler permette di rispondere alla domanda: dopo quanti cicli un ciclo di fatica all'inversione produce il collasso del materiale ? Se la tensione superiore del ciclo all'inversione è minore del limite di fatica all'inversione, la vita è infinita; se invece la

maggiore di  $10^6$  non ha senso perché, se il provino resiste a  $10^6$  cicli, resiste all'infinito.

Si ritorna sull'esempio del motore automobilistico presentato alla fine del Paragrafo 2. Se si suppone che il motore funzioni ad un numero di giri costante, e pari a 6000 giri/minuto, i 6  $10^6$  cicli caratteristici del



ginocchio della curva di Wöhler vengono raggiunti in un tempo di  $(6 \cdot 10^6)/6000 = 1000$  minuti = 16.6 ore , e cioè in meno di un giorno. Se si considera un paziente non più giovane a cui è stata implantata una protesi d'anca, si può stimare che tale paziente effettui  $10^6$  passi all'anno, e quindi il ginocchio della curva di Wöhler viene raggiunto in un tempo di 6 anni.



### 3.3 Fragilità della rottura a fatica

Gli acciai da costruzione, anche i più fragili, possiedono comunque un certo grado di duttilità, per cui la rottura a carichi statici è di fatto accompagnata da deformazioni permanenti. Si è già visto che una misura della duttilità del metallo è l'allungamento percentuale a rottura. Se si riaccostano i due tronconi di un provino rotto a trazione semplice statica, la lunghezza totale del provino risulta aumentata a causa delle deformazioni permanenti, e si nota una strizione in corrispondenza della sezione di frattura spesso accompagnata da una deformazione delle facce di frattura che non permette di riaccostare i due tronconi rotti. Se si riaccostano invece le due parti di un organo meccanico rotto per fatica, per esempio di un albero a gomito, le due superfici di rottura combaciano quasi perfettamente, e nel complesso l'organo meccanico ricostituito non evidenzia deformazioni permanenti significative. Questo dimostra che, mentre la rottura statica di acciai è duttile, la rottura per fatica di acciai è fragile. (Si dice anche che **la fatica infragilisce il materiale**.) In conclusione, a differenza della rottura statica, la rottura per fatica non è preannunciata da alcuna deformazione dell'organo sollecitato, deformazione che consentirebbe la sua preventiva sostituzione. Un altro paragone viene da schegge di mine, che non sono riaccostabili a causa delle deformazioni permanenti, e da vasi di vetro, magari di scavo, che possono essere ricomposti dai restauratori perché non hanno subito deformazioni plastiche. In conclusione, la frattura fragile si incontra: a) in materiali fragili soggetti a carichi statici; b) in materiali fragili e duttili soggetti a carichi affaticanti. La sezione di rottura a fatica a volte conserva traccia della propagazione della frattura durante i cicli di fatica. Si distinguono talvolta delle "linee di riposo", che appaiono come creste, in corrispondenza dell'arresto della frattura in seguito ad una temporanea diminuzione dei carichi. Inoltre a volte certe zone della superficie fratturata si lucidano perché le due superfici affacciantisi vengono a contatto. Tali zone assumono un aspetto tipo carta stagnola. La zona della superficie di frattura dovuta alla propagazione della frattura si distingue in genere dalla zona finale di rottura per schianto. Inoltre la forma della superficie di frattura e della zona di rottura per schianto permettono talvolta una diagnosi sul tipo di caricamento della superficie fratturata. Per esempio, una molla ad elica cilindrica mostra normalmente una rottura del filo a 45° rispetto all'asse del filo, che tradisce la presenza di un momento torcente. La stessa rottura a becco di flauto avviene nel femore umano, in seguito a cadute di sciatori.

### 3.4 Fattori che influenzano la resistenza a fatica dei materiali

**Error! Bookmark not defined.**

Si esaminano brevemente alcuni fattori che hanno un'influenza sulla resistenza a fatica dei materiali metallici.

### 3.4.1 Effetto scala

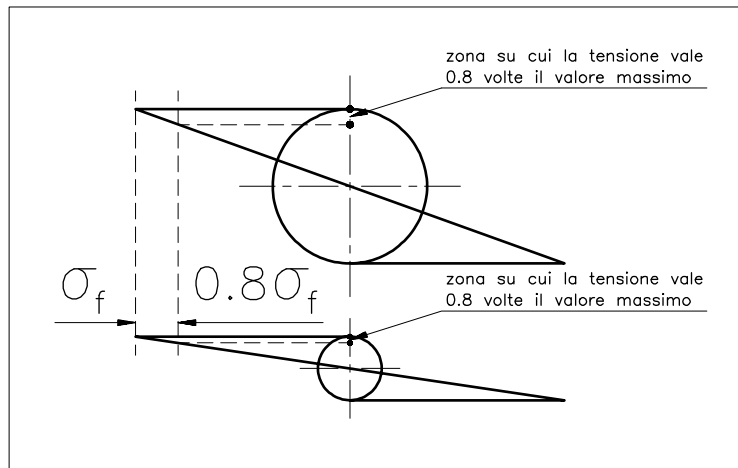


Figura 3.4.1.1

Le prove sperimentali indicano che, nel caso di flessione e torsione alternata, si ha una diminuzione del limite di fatica all'inversione all'aumentare delle dimensioni del provino, mentre nel caso di sforzo normale affaticante non si incontra una simile diminuzione di resistenza. Questa diminuzione di resistenza

con l'aumento delle dimensioni del provino si può spiegare col fatto che, a parità di tensione massima, in un provino di dimensioni maggiori la tensione flessionale (o torsionale) assume valori elevati su zone maggiormente estese, Figura 3.4.1.1. In un provino di dimensioni maggiori risulta quindi più probabile che un difetto del materiale cada dove le tensioni assumono un valore elevato.

La Figura 3.4.1.1 presenta due cilindri di dimensioni diverse, soggetti a flessione. La zona su cui la tensione è, diciamo, 0.8 volte il valore massimo è più estesa nel cilindro di raggio maggiore.

### 3.4.2 Finitura superficiale

Mentre la finitura superficiale non altera di molto la resistenza a carichi statici del materiale, essa influenza sensibilmente la resistenza a fatica, in particolare degli acciai fragili. Specie in caso di sollecitazioni alte, occorre prevedere una finitura di precisione, per esempio una rettifica fine, del pezzo meccanico.

### 3.4.3 Trattamenti termici

Error! Bookmark not defined.

La carbocementazione e la nitrurazione producono autotensioni di compressione alla superficie del pezzo, dove in genere cadono le tensioni massime di funzionamento. Tale autotensione compressiva aumenta la resistenza meccanica a fatica, dato che i materiali metallici lavorano meglio a compressione che a trazione. L'effetto positivo della nitrurazione è più contenuto di quello della cementazione.

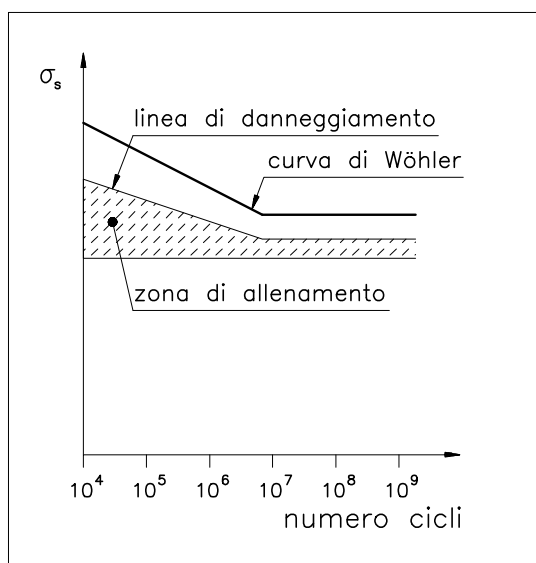
Anche la tempra superficiale produce favorevoli autotensioni compressive.

### 3.4.4 Lavorazioni meccaniche

La tornitura e la rettifica producono in genere sfavorevoli autotensioni positive. La pallinatura e la rullatura causano invece favorevoli autotensioni negative. La pallinatura viene impiegata in molle e bielle.

### 3.4.5 Allenamento

Se si allena il materiale sottoponendolo preventivamente ad un ciclo di fatica inferiore a quello di normale funzionamento, e che cade, riferendosi al diagramma di Wöhler e quindi implicitamente ad un ciclo all'inversione, in un'area illustrata in Figura 3.4.5.1, il materiale aumenta la propria resistenza a fatica. Di conseguenza, un materiale allenato mostra



una durata a fatica maggiore di un materiale non allenato.

Questo effetto è difficilmente matematicizzabile, e dimostra che è difficile dimensionare con rigore un organo meccanico. La Figura 3.4.5.1 mostra la zona che corrisponde all'allenamento. Un allenamento con tensioni superiori alla linea di danneggiamento riduce la resistenza a fatica del materiale.

### 4 Il cumulo di fatica

Figura 3.4.5.1

Si è finora trattato soltanto il caso di un componente meccanico

soggetto ad un ciclo di sollecitazione stabile nel tempo. Nel seguito si espone una parziale estensione al caso di un organo meccanico soggetto a più cicli stabili nel tempo ed agenti consecutivamente (e non simultaneamente). Si parla in questo caso di cumulo di fatica, ad indicare che il materiale è danneggiato dall'azione cumulativa di più cicli stabili nel tempo, agenti in successione.

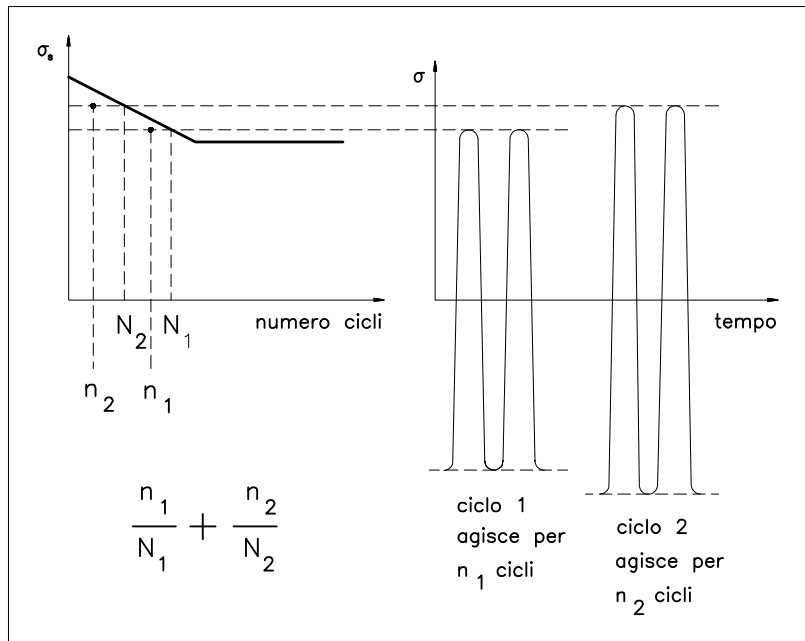


Figura 4.1.1

Come già visto, il diagramma di Wöhler permette di rispondere alla domanda: dato un ciclo di fatica stabile, dopo quanti cicli il materiale collassa? Questo numero di cicli viene indicato nel seguito con  $N$ . Si vuole sviluppare una semplice teoria che risponda a questa domanda: dato il ciclo 1 ed il ciclo 2 di fatica all'inversione stabili

nel tempo, applicati in successione al pezzo meccanico per un numero di cicli rispettivamente  $n_1$  ed  $n_2$ , il materiale collassa?

Si indicano con  $N_1$  ed  $N_2$  i due numeri di cicli che porterebbero a rottura il materiale se i due cicli di fatica 1 e 2 agissero separatamente senza succedersi. Se il primo ciclo di fatica agisce per  $n_1$  cicli (dove  $n_1 < N_1$  se no il materiale collassa sotto l'azione di un solo ciclo di fatica) si può ritenere, sulla base di un'approssimazione lineare, che il materiale sia danneggiato dal primo ciclo di fatica per una frazione  $n_1/N_1$  (dove il valore 0 corrisponde a nessun danneggiamento, mentre il valore 1 corrisponde al collasso), e che similmente il secondo ciclo danneggi il materiale per una frazione  $n_2/N_2$ . Se dunque i valori di  $n_1$ ,  $N_1$ , e di  $n_2$ ,  $N_2$ , soddisfano l'equazione:

$$\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1 \quad (4.1)$$

il materiale collassa, mentre se la somma delle frazioni è minore di 1, il materiale non collassa a fatica. In altre parole, il collasso avviene se il

**Error! Bookmark not defined.**

cumulo delle frazioni dei danneggiamenti eguaglia o supera 1 . Questa teoria non è ben confermata dai risultati sperimentali, i quali suggeriscono di adottare per il secondo membro della (4.1) un valore compreso tra 0.6 e 2.2 . Per esempio, questa teoria non riesce ad inglobare gli effetti positivi dell'allenamento.

La teoria del cumulo di fatica è immediatamente estendibile a più di due cicli.

La Figura 4.1.1 illustra una combinazione di due cicli che non produce o produce collasso a seconda del valore assunto dal primo membro della (4.1).

*Le profezie, invece, avranno fine come cesseranno le lingue e la scienza avrà termine.*

Paolo, prima lettera ai Corinti, 13,8

## 5 Il coefficiente di sicurezza

Nei calcoli a tempo definito, effettuati tramite il diagramma di Wöhler, si determina il numero di cicli che un certo ciclo di fatica deve effettuare per portare a collasso il materiale. Di conseguenza, non ha alcun senso adottare un coefficiente di sicurezza rispetto alla rottura, proprio perché si effettua un calcolo a rottura. Nei calcoli a tempo infinito effettuati tramite il diagramma di Goodman, invece, è importante valutare di quanto i carichi applicati sono lontani dal valore critico che causerebbe la rottura a fatica del componente meccanico, cioè di quanto l'organo meccanico è in sicurezza rispetto al carico di collasso. Nel seguito si mostra come definire il coefficiente di sicurezza in fatica, almeno per stati tensionali affaticanti monodimensionali.

Si supponga che il ciclo di fatica sia stabile nel tempo. Ad un certo momento, a causa di un aumento dei carichi agenti sulla struttura, il ciclo delle tensioni degenera, cioè esplode, fino a che si raggiunge la tensione critica affaticante, con conseguente collasso della struttura. Per esempio, le coclee per la compressione di polpe di barbabietole vengono messe in rotazione tramite motore elettrico e riduttori a ruote dentate. Se la polpa frena la rotazione della coclea, e se non è presente un limitatore di coppia torcente, per esempio una frizione, la velocità di rotazione diminuisce con conseguente aumento, a parità di potenza, del momento torcente. Di conseguenza, le tensioni torcenti esplodono fino a raggiungere il valore di collasso nell'albero di trasmissione o nei denti della ruota dentata. Ci si

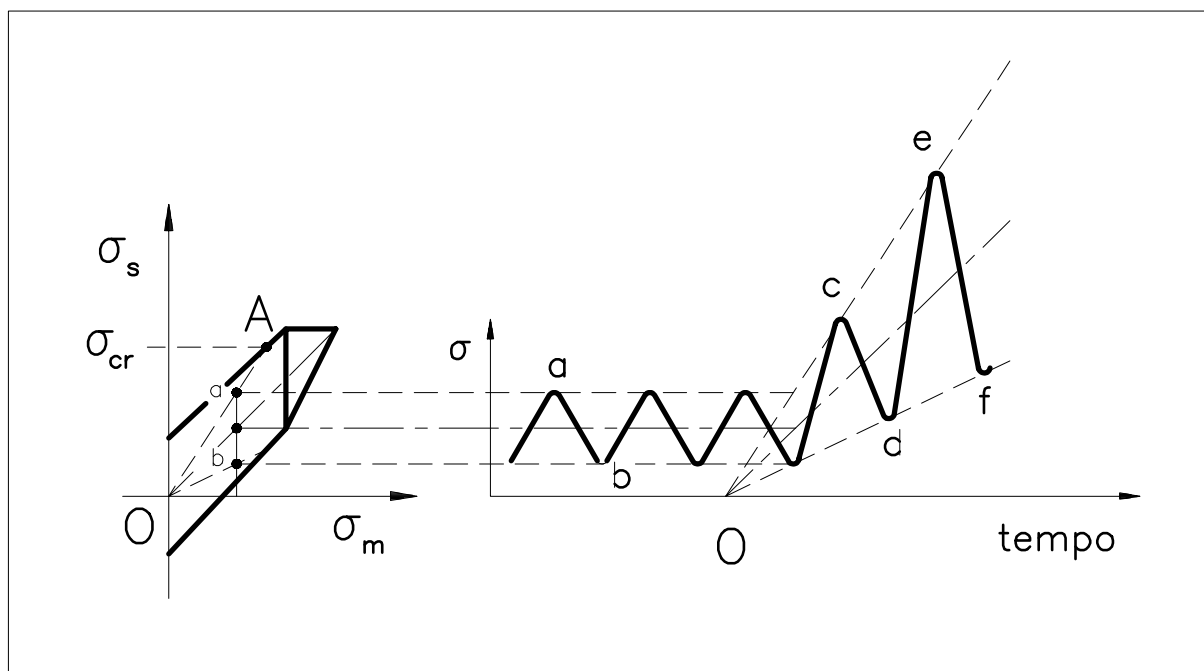


Figura 5.1

pone il problema di determinare, valendosi del diagramma di Goodman, la tensione critica affaticante in funzione del tipo di esplosione del ciclo di fatica. Si riportano diversi esempi dai quali è possibile estrapolare il comportamento da tenere in casi diversi.

Un **primo tipo** di esplosione di ciclo di fatica è quello in cui  $s$ ,  $m$  e  $i$  aumentano con la stessa legge. In altre parole, si ha  $s/i = \text{cost}$ ,  $m/i = \text{cost}$ , cioè di una esplosione **a ventaglio** della tensione superiore ed inferiore. Nel diagramma di Goodman,  $a$  e  $b$  rappresentano i punti di normale funzionamento del ciclo di fatica. Quando il ciclo esplode, punti come  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$  debbono stare, nel diagramma di Goodman, su rette uscenti dall'origine (perché su di esse  $s/i = \text{costante}$  e  $m/i = \text{costante}$ ) e passanti per  $a$  e  $b$ . L'ordinata  $y$  del punto  $A$  definisce la tensione critica affaticante perché tale punto è al contorno del diagramma di Goodman, e quindi descrive sul diagramma di Goodman il punto di collasso a fatica in seguito all'esplosione del ciclo.

La Figura 5.1 rappresenta il primo tipo di esplosione di ciclo, e la sua rappresentazione sul diagramma di Goodman. La posizione del punto  $A$  nel diagramma di Goodman, e quindi la tensione critica, rimane invariata anche se si cambia la frequenza del ciclo di fatica.

Questo tipo di esplosione di ciclo avviene quando tutte le tensioni dipendono da una unica causa, che è una forza. Al raddoppiare della forza, tutte le tensioni raddoppiano (supponendo una elasticità lineare), e quindi la tensione superiore ed inferiore raddoppiano.

Un **secondo tipo** di esplosione di ciclo di fatica è quello in cui  $i =$

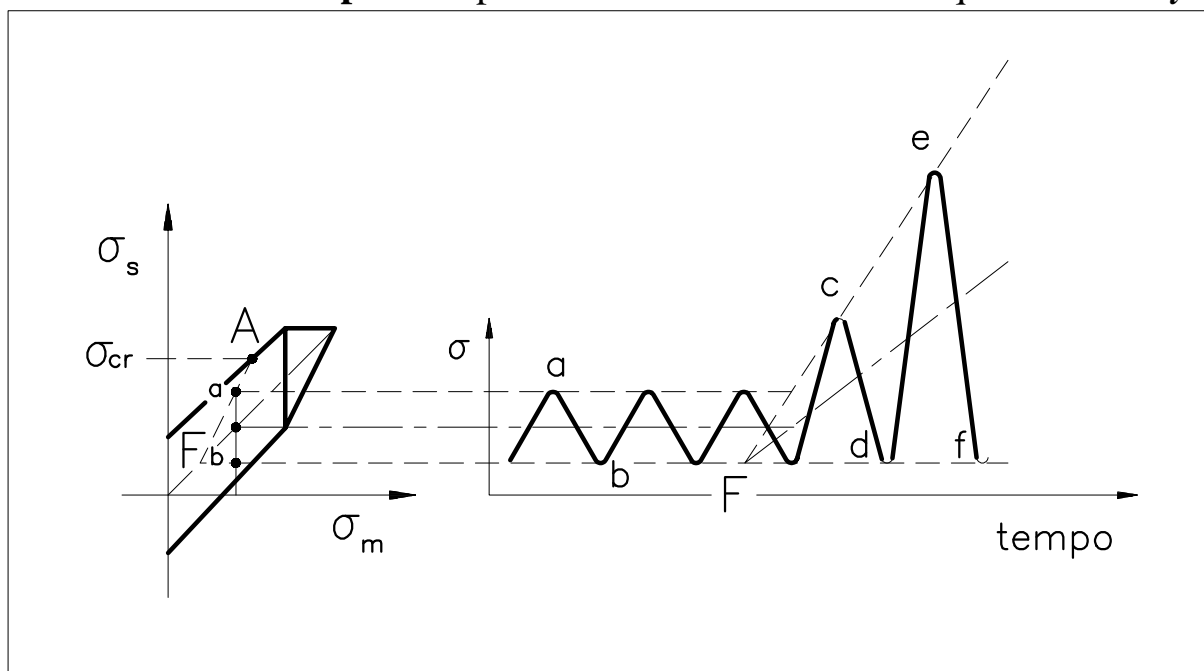


Figura 5.2



**costante.** Nel diagramma di Goodman,  $a$  e  $b$  rappresentano i punti di normale funzionamento del ciclo di fatica. Conviene riportare una retta orizzontale per il punto  $b$ . Ove essa interseca la retta a 45°, punto  $F$  (una specie di fuoco), si ha un ipotetico ciclo in cui  $i = m$  e quindi anche  $s = m$ . La retta delle  $s$  parte quindi dal punto  $F$  e passa per  $a$ . Il punto  $F$  è indicato anche nel diagramma - tempo.

La Figura 5.2 rappresenta il secondo tipo di esplosione di ciclo, e la sua rappresentazione sul diagramma di Goodman.

Questo tipo di esplosione di ciclo avviene per esempio quando la tensione inferiore dipende da una causa stabile nel tempo, per esempio autotensioni dovute a trattamenti termici, mentre la tensione superiore esplode all'esplosione di una causa (forza) esterna. Questa situazione può avvenire in un dente di una ruota dentata, dove il ciclo di fatica tende ad essere all'origine, dato che il dente è scarico quando non ingrana. Esplode soltanto la tensione superiore, mentre la tensione inferiore rimane costante, ed in particolare nulla. Se poi sono presenti autotensioni, la tensione inferiore può essere non nulla.

Un **terzo tipo** di esplosione di ciclo di fatica è quello in cui  $m =$

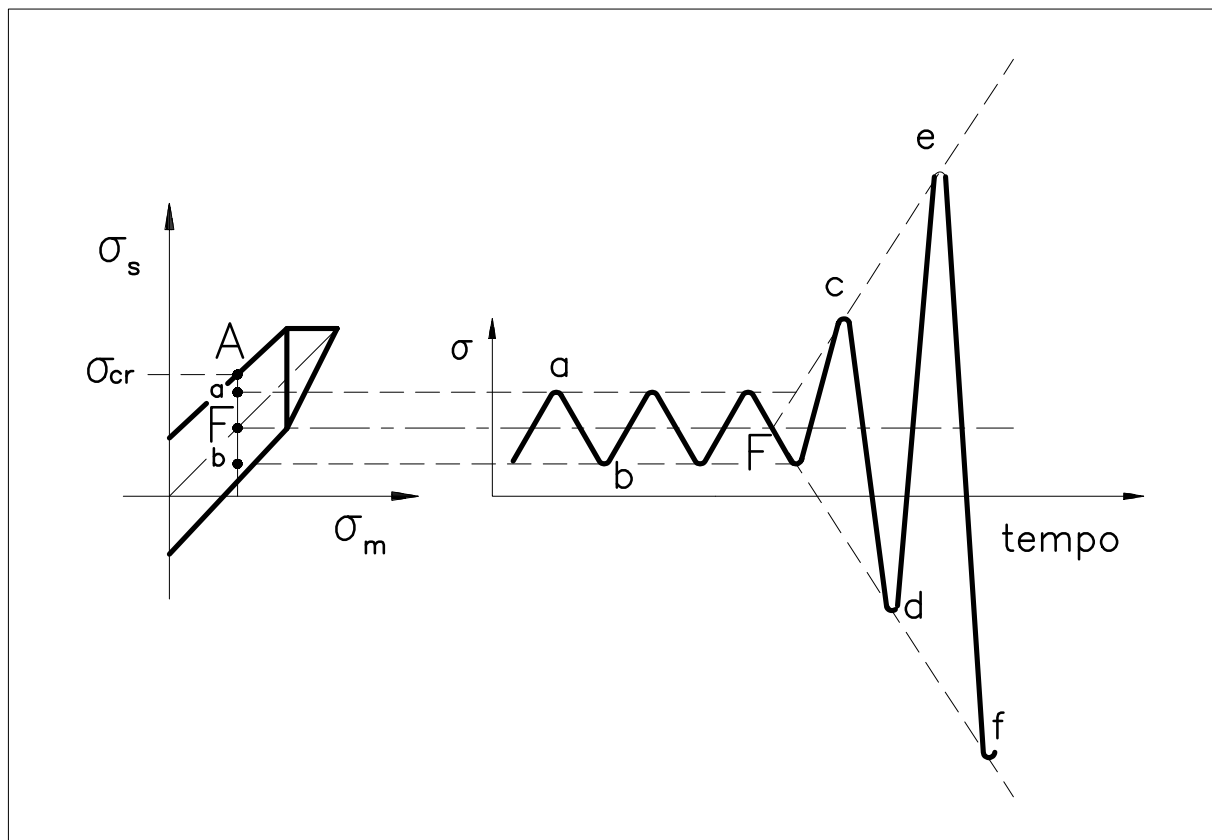


Figura 5.3

**costante.** Quindi i punti come  $c$ ,  $e$ ,  $g$  e  $d$ ,  $f$ ,  $h$  stanno nel diagramma di

**Error! Bookmark not defined.**

Goodman su di una retta verticale passante per  $a$ ,  $b$ , che permette di determinare la tensione critica, punto A.

La Figura 5.3 rappresenta il terzo tipo di esplosione di ciclo, e la sua rappresentazione sul diagramma di Goodman.

Questa esplosione di ciclo avviene per esempio nella flessione rotante in un albero di trasmissione, dove in particolare la tensione media è nulla, dato che il ciclo delle tensioni è all'inversione. Se poi agisce sull'albero un precarico assiale (dovuto per esempio a cuscinetti precaricati assialmente, tipo ad X o ad O), e questo precarico è stabile nel tempo, la sovrapposizione del ciclo flessionale affaticante e della tensione assiale statica porta ad una esplosione del tipo in questione con la tensione media non nulla.

Un **quarto tipo** di esplosione di ciclo di fatica è quello in cui  $a = \text{costante}$ . Questo caso è forse il più accademico, il meno realistico. In questo caso il fuoco  $F$  degenera all'infinito.

La Figura 5.4 rappresenta il quarto tipo di esplosione di ciclo, e la sua rappresentazione sul diagramma di Goodman. In questo caso la tensione critica coincide con lo snervamento, dato che è in pratica impossibile che la retta a 45 passante per il punto  $a$  nel diagramma di Goodman tagli il contorno superiore a 43 del diagramma di Goodman.

Dai quattro casi trattati di esplosione di ciclo emerge che la tensione critica dipende dal modo in cui il ciclo esplode. Si deduce anche che il tipo

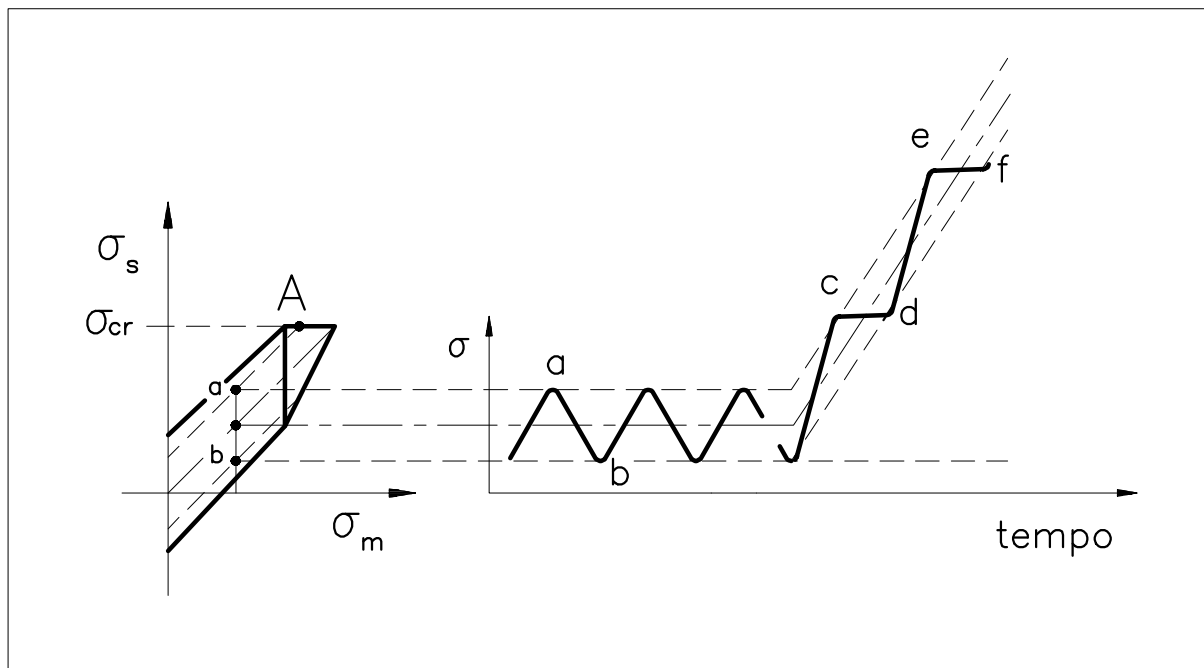


Figura 5.4

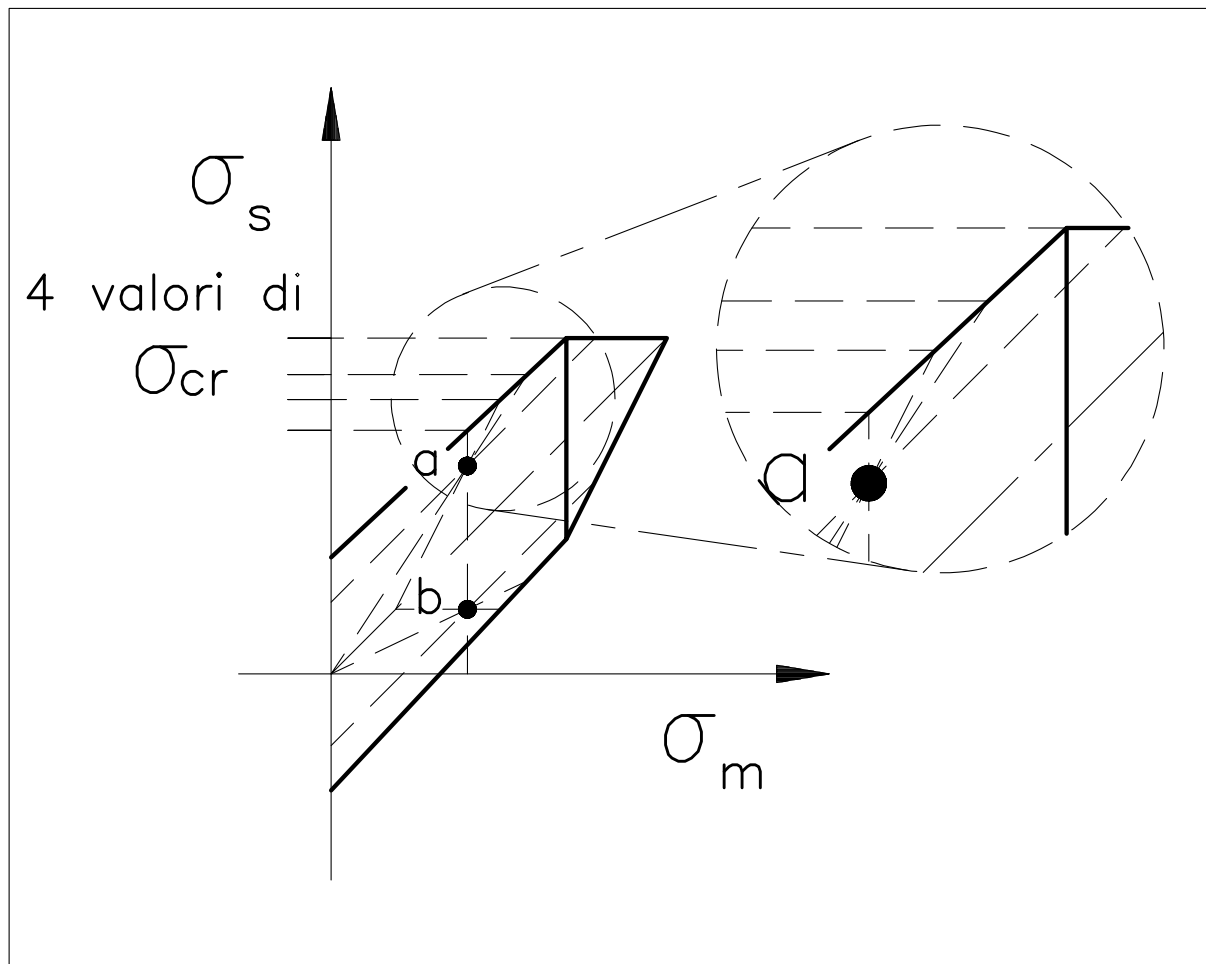


Figura 5.5

di esplosione che produce la minore tensione critica è quello del terzo tipo, cioè l'esplosione con la tensione media che rimane costante. La Figura 5.5 riassume le tensioni critiche secondo i quattro tipi di esplosione di ciclo.

Se il modo di esplodere del ciclo è chiaramente ipotizzabile, la tensione critica andrà valutata riferendosi alle modalità effettive di esplosione di ciclo. Nei casi di indecisione, si suggerisce di ipotizzare il tipo di esplosione maggiormente a favore della sicurezza, cioè l'esplosione con la tensione media costante.

La definizione della tensione critica affaticante permette di definire il grado di sicurezza  $n$  come:

$$n = \frac{\text{tensione critica}}{\text{tensione superiore di funzionamento regolare}}. \quad (5.1)$$

Negli esempi di esplosione di cicli di fatica,  $n$  vale:

$$n = \frac{\sigma_{critica}}{\sigma_a} . \quad (5.2)$$

dove con  $\sigma_a$  si indica la tensione di funzionamento al punto  $a$  di Figura 5.5 , e non la tensione alterna.

Il grado di sicurezza  $n$  è importante perché costituisce un indice della sicurezza del pezzo meccanico, cioè esprime la distanza del carico applicato dal valore di collasso. Un coefficiente di sicurezza minore di 1 corrisponde al collasso della struttura. Per le costruzioni più importanti il coefficiente di sicurezza è fissato dalla legge. Ad esempio, il grado di sicurezza della fune portante-traente di una funivia deve essere non minore di 6.

Si sviluppano nel seguito due osservazioni critiche sulla metodologia impiegata per determinare la tensione critica in funzione del tipo di esplosione del ciclo di fatica. Innanzitutto, la tensione critica viene determinata dal diagramma di Goodman, che è stato ricavato tramite cicli di fatica stabili nel tempo. L'impiego del diagramma di Goodman anche nel caso di esplosione di cicli, cioè di cicli non stabili nel tempo, è quindi criticabile. In secondo luogo, le rette che rappresentano nel diagramma di Goodman la tensione superiore ed inferiore del ciclo di fatica durante la sua esplosione forniscono una rappresentazione continua di un fenomeno, quello dell'esplosione del ciclo di fatica, che richiederebbe invece una rappresentazione discreta. Infatti le tensioni superiori ed inferiori dell'onda di tensione dovrebbero a rigore essere rappresentate da un numero discreto (e non infinito) di punti giacenti sulle suddette rette. Il collasso del materiale durante l'esplosione del ciclo avviene contemporaneamente al raggiungimento di una delle tensioni superiori via via crescenti in seguito all'esplosione del ciclo, mentre il collasso è meno probabile in corrispondenza della tensione inferiore o della tensione media. La retta delle tensioni superiori invece intersecherà il contorno superiore del diagramma di Goodman in un punto che può non corrispondere al raggiungimento di una delle tensioni superiori.

La seconda approssimazione è meno drastica della prima. Si deduce comunque che il calcolo del coefficiente di sicurezza assume, in seguito alle approssimazioni sopra illustrate, un significato di calcolo convenzionale più che di calcolo realistico.

## 6 Il progetto in fatica a vita infinita

**Error! Bookmark not defined.**

In un testo di Costruzione di Macchine si legge: *The .. Goodman diagram is particularly useful for analysis when all the dimensions of the part are known and the stress components can be easily calculated. But it is rather difficult to use for design, that is, when the dimensions are unknown.* In generale, quindi, si riesce ad impiegare il diagramma di Goodman per verificare la durata infinita di un componente meccanico soltanto se le dimensioni del pezzo sono note e si possono perciò calcolare le tensioni. Infatti le variabili lungo gli assi del piano di Goodman sono tensioni, in particolare la tensione media e la superiore. Viceversa, risulta in genere difficile impiegare il diagramma di Goodman in fase di progettazione, quando cioè le dimensioni del componente meccanico risultano incognite. Tuttavia, per le quattro esplosioni del ciclo delle tensioni esaminate nel Paragrafo 5, caratterizzate da uno stato tensionale uniassiale con esplosione lineare delle tensioni, è possibile impiegare il diagramma di Goodman in fase progettuale, e cioè per calcolare le dimensioni di un componente meccanico che garantiscano una vita infinita con un coefficiente di sicurezza imposto. Si considera dapprima l'esplosione del primo tipo, a ventaglio, e si generalizza poi l'approccio agli altri tre tipi di esplosioni.

## 6.1 Il coefficiente $K$

Si consideri una trave in C40 , di lunghezza  $l = 400$  mm e di sezione trasversale quadrata di lato  $a$  , incastrata ad una estremità e caricata all'altra estremità da una forza trasversale  $P$  che oscilla tra  $+1000$  N e  $-500$  N , Figura 6.1.1 . Si vuole calcolare la dimensione del lato  $a$  per la quale è garantita una vita infinita della trave con un coefficiente di sicurezza  $n=2$ .

Per effettuare questo dimensionamento, occorre individuare dal diagramma di Goodman del C40 la tensione critica relativa al particolare ciclo alterno asimmetrico delle tensioni. Tuttavia le tensioni non sono

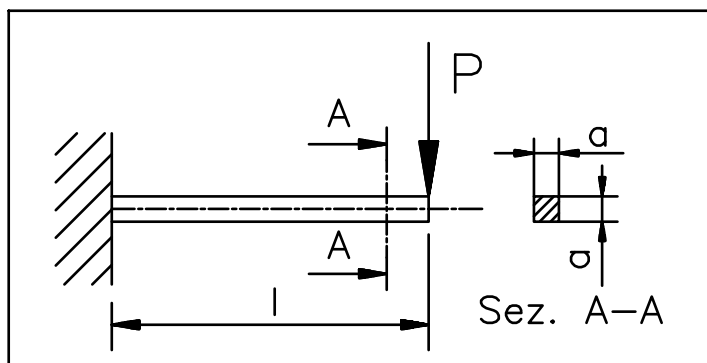


Figura 6.1.1

immediatamente calcolabili, perché le dimensioni della sezione trasversale della trave sono incognite. Sembrerebbe quindi necessario ricorrere ad un calcolo iterativo, condotto fissando un valore iniziale di  $a$  , calcolando le tensioni, determinando quindi la

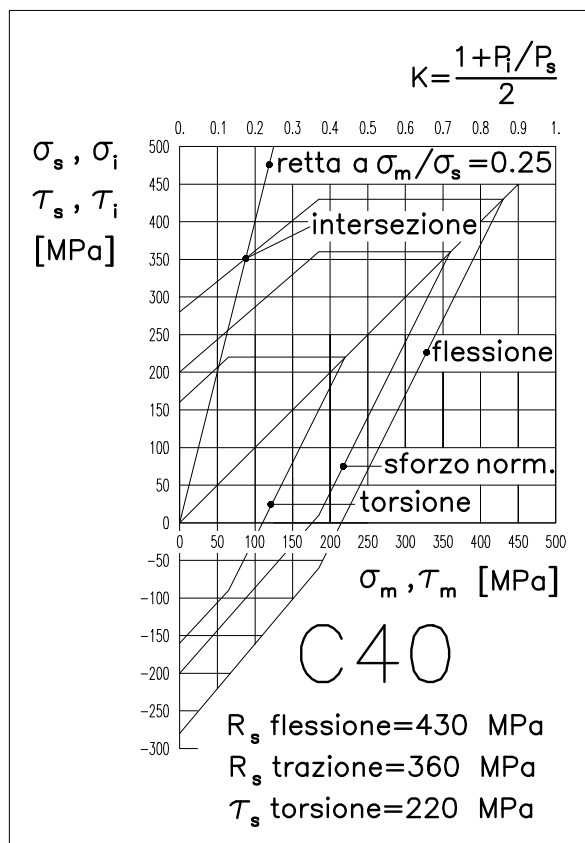
tensione critica dal diagramma di Goodman, e verificando poi se la trave lavora al limite di criticità. Se però si ammette che il ciclo delle tensioni esploda a ventaglio, se cioè le tensioni superiore ed inferiore esplodono in modo tra loro proporzionale, è possibile effettuare un semplice calcolo diretto e non iterativo di  $a$ , attraverso l'impiego del coefficiente  $K$ . La definizione del coefficiente  $K$  è la seguente:

$$K = \frac{1 + \frac{P_i}{P_s}}{2} \quad (6.1)$$

dove  $P_i$  rappresenta il valore inferiore del carico applicato, e  $P_s$  il valore superiore. Il significato fisico di  $K$  appare chiaro se si ipotizza di lavorare in elasticità lineare, campo in cui vale una relazione di proporzionalità lineare tra carico  $P$  e tensione :

$$K = \frac{1 + \frac{P_i}{P_s}}{2} = \frac{1 + \frac{\sigma_i}{\sigma_s}}{2} = \frac{\sigma_i + \sigma_s}{2\sigma_s} = \frac{\sigma_m}{\sigma_s} \quad (6.2)$$

Il luogo dei punti sul piano di Goodman (il piano cioè del diagramma di Goodman, di coordinata lungo l'asse orizzontale uguale a  $m$ , e lungo



l'asse verticale uguale a  $s$ , ed anche a  $i$ ), lungo i quali  $K$  rimane costante, è una retta a  $m/s$  costante e di valore uguale a  $K$ , e quindi è la retta superiore (e non inferiore, dato che  $K$  è definito in termini di  $s$  e non di  $i$ ) di esplosione a ventaglio del ciclo, l'unico tipo di esplosione di ciclo di fatica durante il quale il rapporto  $m/s$  rimane costante.

Siccome il rapporto  $m/s$  rimane costante lungo questa retta, quando  $s$  va a zero, anche  $m$  si annulla, e quindi tale retta, in un piano di Goodman di coordinate  $m$  e  $s$ , deve passare per l'origine. Inoltre tale retta deve passare per il punto della scala di  $K$  rappresentativo del valore assunto da  $K$  per quel particolare ciclo di fatica, scala di  $K$

Figura 6.1.2

**Error! Bookmark not defined.**

inclusa in ogni diagramma di Goodman riportato in questo testo. Questi due punti definiscono completamente la retta  $m/s = K$ , che può quindi essere tracciata. L'intersezione tra tale retta ed il contorno superiore del diagramma di Goodman definisce la tensione critica per il particolare tipo di ciclo di fatica delle tensioni, e per una esplosione del ciclo a ventaglio.

L'importanza del coefficiente  $K$  sta nel fatto che esso è calcolabile anche senza valutare le tensioni, direttamente dai carichi, e quindi  $K$  risulta particolarmente utile in sede di progetto.

Si ritorna all'esempio proposto, e si calcola  $K$ :

$$K = \frac{1 + \frac{P_i}{P_s}}{2} = \frac{1 + \frac{-500}{+1000}}{2} = 0.25 \quad (6.3)$$

Si congiunge poi nel diagramma di Goodman del C40 l'origine col punto, lungo la retta dedicata a  $K$ , di valore 0.25, e si determina l'intersezione col diagramma flessionale di Goodman, Figura 6.1.2. L'ordinata di tale punto di intersezione rappresenta la tensione superiore di criticità. Nel caso in questione, tale tensione critica vale circa 350 MPa. Siccome il coefficiente di sicurezza imposto è  $n = 2$ , la tensione ammissibile vale  $350/2 = 175$  MPa. La dimensione del lato  $a$  si determina quindi dall'equazione che esprime che la tensione flessionale all'incastro, dove il momento flettente è massimo, deve eguagliare la tensione ammissibile:

$$\sigma_f = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{M_f}{W} = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{P_s \times l}{\frac{a^3}{6}} = 175 \Rightarrow \frac{1000 \times 400}{\frac{a^3}{6}} = 175 \Rightarrow a = 23.94 \approx 24 \text{ mm} \quad (6.4)$$

Si sviluppa nel seguito un'osservazione sulla definizione di carico superiore ed inferiore da impiegare nel calcolo di  $K$  secondo la (6.3). Se il carico  $P$  oscilla tra  $+200$  N e  $-700$  N, la tensione flessionale media  $m$  è negativa, dato che è riferita al carico medio di  $(+200 - 700)/2 = -250$  N. Si

ricorda che il diagramma di Goodman riporta dati di criticità a fatica soltanto per tensioni medie positive. Se il carico  $P$  oscilla tra  $+ 200 \text{ N}$  e  $- 700 \text{ N}$ , occorre riferirsi non più al ciclo reale delle tensioni, caratterizzato da una tensione media negativa, ma ad un ciclo variato, che a) sia più pericoloso di quello reale, cioè sia a favore della sicurezza, e b) possieda una tensione media positiva. Tale ciclo si ottiene ribaltando il ciclo di fatica effettivo attorno all'asse  $x$ , l'asse del tempo, vedi il Paragrafo 3.1, in modo da ottenere un ciclo variato, con tensione  $m$  positiva. In altre parole, ci si deve riferire ad un ciclo variato dove  $P$  oscilla tra  $+ 700 \text{ N}$  e  $- 200 \text{ N}$ . Quindi il valore corretto di  $K$  è :

$$K = \frac{1 + \frac{P_i}{P_s}}{2} = \frac{1 + \frac{-200}{+700}}{2} = 0.357 \quad (6.5)$$

e non :

$$K = \frac{1 + \frac{P_i}{P_s}}{2} = \frac{1 + \frac{-700}{+200}}{2} = -1.25 \quad (6.6)$$

dato che  $K$  varia tra 0 ed 1 .

In questo testo il coefficiente  $K$  viene impiegato in un esercizio svolto nel Capitolo sulle tensioni ideali, relativo alla verifica di resistenza di un perno della puleggia di rinvio di una seggiovia, e nel calcolo del fusto di una biella automobilistica.

## 6.2 Generalizzazione del coefficiente $K$

Se il ciclo di fatica non esplode a ventaglio ma a tensione inferiore, media od alterna costante, occorre generalizzare il coefficiente  $K$ . La generalizzazione più semplice si ottiene forse nel caso di **esplosione a tensione media costante**, che è quindi la prima a venire considerata. La Figura 6.2.1 (a) illustra i principali simboli impiegati. In particolare,  $s_r, i_r, m_r, a_r$  denotano rispettivamente le tensioni superiore, inferiore, media ed alterna del ciclo a regime (e cioè di normale funzionamento), mentre  $s_c, i_c, m_c, a_c$  indicano le tensioni superiore, inferiore, media ed alterna del ciclo critico, cioè quando, in seguito all'esplosione, il ciclo a regime si dilata fino a cadere sul contorno del diagramma di Goodman. La Figura 6.2.1 (b) mostra che, se si sapesse tracciare una linea che passa per l'origine del piano di Goodman e per il punto  $(m_c, s_c)$  tramite l'aiuto di un coefficiente

**Error! Bookmark not defined.**



$H$ , riportato lungo la scala 0-1, e valutato a partire dalla conoscenza dei soli carichi a regime superiore,  $P_{s,r}$ , ed inferiore,  $P_{i,r}$ , e del coefficiente di sicurezza richiesto  $n$ , e quindi senza conoscere le tensioni del componente, allora si saprebbe valutare la tensione superiore critica come intersezione di tale retta col contorno superiore del diagramma di Goodman. In altre parole, se si sapesse calcolare  $H$ , si saprebbe progettare la struttura. Si noti che tale retta non descrive più la tensione superiore durante l'esplosione del ciclo (come invece avviene per il coefficiente  $K$ ), ma è una retta di comodo.

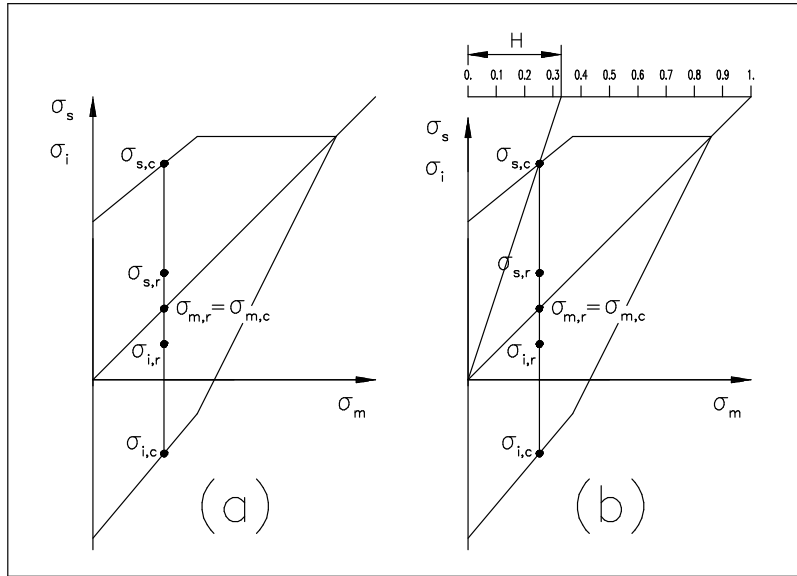


Figura 6.2.1

I calcoli che seguono mostrano appunto che risulta possibile esprimere il coefficiente  $H$  in funzione dei carichi superiore ed inferiore di normale funzionamento e del coefficiente di sicurezza  $n$ . Infatti, siccome il ciclo di fatica considerato esplode a  $m$  costante, è possibile scrivere:

$$\sigma_{m,r} = \sigma_{m,c} \Rightarrow \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} = \frac{\sigma_{m,c}}{\sigma_{s,c}} \quad (6.2.1)$$

Nel seguito si indica con  $K$  il rapporto  $m_{r/s,r} = (1 + P_{i,r}/P_{s,r})/2$ , (vedi il Paragrafo 6.1), con  $H$  il rapporto  $m_{c/s,c}$ , mentre il coefficiente di sicurezza  $n$  è definito come  $s_{c/s,r}$ , si veda il Paragrafo 5. Quindi:

$$\frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} = \frac{\sigma_{m,c}}{\sigma_{s,c}} \Rightarrow \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,r}} \frac{\sigma_{s,r}}{\sigma_{s,c}} = H \Rightarrow K \times \frac{1}{n} = H \Rightarrow H = \frac{K}{n} \quad (6.2.2)$$

Il valore di  $H$  si ricava dai carichi superiore ed inferiore a regime (tramite i quali si calcola  $K$ ) e dal coefficiente di sicurezza  $n$ , e quindi  $H$  si può valutare senza conoscere la geometria della struttura e le sue tensioni. Riportando  $H$  lungo la scala orizzontale di Figura 6.2.1 (b) e tracciando una retta dall'origine, questa interseca il contorno superiore del diagramma

di Goodman in corrispondenza della tensione superiore critica, la cui conoscenza permette di progettare la struttura. Il coefficiente  $H$  rappresenta quindi l'inverso del coefficiente angolare della retta inclinata che determina la tensione superiore critica  $\sigma_{s,c}$ .

Si considera nel seguito **l'esplosione a tensione inferiore costante**. Si scrive:

$$\sigma_{i,r} = \sigma_{i,c} \quad (6.2.3)$$

Siccome:

$$\begin{aligned} \sigma_{m,r} &= \frac{\sigma_{i,r} + \sigma_{s,r}}{2} \Rightarrow \sigma_{i,r} = 2 \sigma_{m,r} - \sigma_{s,r} \\ \sigma_{m,c} &= \frac{\sigma_{i,c} + \sigma_{s,c}}{2} \Rightarrow \sigma_{i,c} = 2 \sigma_{m,c} - \sigma_{s,c} \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

la (6.2.3) diventa:

$$2 \sigma_{m,r} - \sigma_{s,r} = 2 \sigma_{m,c} - \sigma_{s,c} \quad (6.2.5)$$

oppure:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} - \frac{\sigma_{s,r}}{\sigma_{s,c}} &= 2 \frac{\sigma_{m,c}}{\sigma_{s,c}} - \frac{\sigma_{s,c}}{\sigma_{s,c}} \Rightarrow 2 \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} - \frac{1}{n} = 2 H - 1 \Rightarrow \\ 2 \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,r}} \frac{\sigma_{s,r}}{\sigma_{s,c}} - \frac{1}{n} &= 2 H - 1 \Rightarrow 2 K \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 2 H - 1 \Rightarrow H = \frac{2 K + n - 1}{2 n} \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

Si considera nel seguito **l'esplosione a tensione alterna costante**. Si scrive:

$$\sigma_{a,r} = \sigma_{a,c} \quad (6.2.7)$$

Siccome:

$$\sigma_{a,r} = \sigma_{s,r} - \sigma_{m,r} \quad ; \quad \sigma_{a,c} = \sigma_{s,c} - \sigma_{m,c} \quad (6.2.8)$$

la (6.2.7) diventa:

$$\sigma_{s,r} - \sigma_{m,r} = \sigma_{s,c} - \sigma_{m,c} \quad (6.2.9)$$

**Error! Bookmark not defined.**

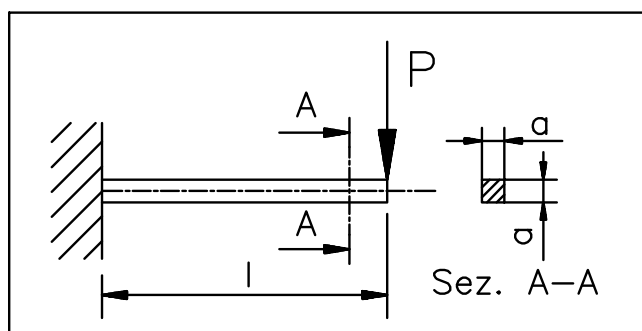


Figura 6.2.2

oppure:

$$\frac{\sigma_{s,r}}{\sigma_{s,c}} - \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} = \frac{\sigma_{s,c}}{\sigma_{s,c}} - \frac{\sigma_{m,c}}{\sigma_{s,c}} \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,c}} = 1 - \frac{\sigma_{m,c}}{\sigma_{s,c}}$$

$$\frac{1}{n} - \frac{\sigma_{m,r}}{\sigma_{s,r}} \frac{\sigma_{s,r}}{\sigma_{s,c}} = 1 - H \Rightarrow \frac{1}{n} - K \frac{1}{n} = 1 - H =$$

(6.2.10)

Si propone la seguente tabella riassuntiva:

Tipo di esplosione di ciclo	Parametro $H$ da riportare lungo la scala 0 - 1
A ventaglio	$H = K$
A tensione inferiore costante	$H = \frac{2K + n - 1}{2n}$
A tensione media costante	$H = \frac{K}{n}$
A tensione alterna costante	$H = \frac{K + n - 1}{n}$

Si nota che, per tutti i tipi di esplosione, ponendo  $n = 1$  si ottiene  $H = K$ . Infatti, se  $n = 1$  il ciclo a regime cade già sul contorno del diagramma di Goodman, per cui non si ha una esplosione di ciclo o, in altre parole, tutti i tipi di esplosione dei cicli devono fornire la stessa espressione di  $H$ .

Si riconsidera nel seguito l'esercizio svolto nel Paragrafo 6.1 , e cioè una trave in C40 , di lunghezza  $l = 400$  mm e di sezione trasversale quadrata di lato  $a$ , incastrata ad una estremità e caricata all'altra estremità da una forza trasversale  $P$  che oscilla tra +1000 N e -500 N , Figura 6.2.2 . Si vuole calcolare la dimensione del lato  $a$  per la quale è garantita una vita infinita della trave con un coefficiente di sicurezza  $n=2$  per i quattro tipi di esplosioni di ciclo. Si era già trovato che  $K = 0.25$  . Quindi il valore di  $H$  per i quattro casi di esplosioni di cicli risulta dalla seguente Tabella:

Tipo di esplosione di ciclo	Parametro $H$
A ventaglio	$H = K = 0.25$
A tensione inferiore costante	$H = \frac{2K + n - 1}{2n} = 0.375$
A tensione media costante	$H = \frac{K}{n} = 0.125$
A tensione alterna costante	$H = \frac{K + n - 1}{n} = 0.625$

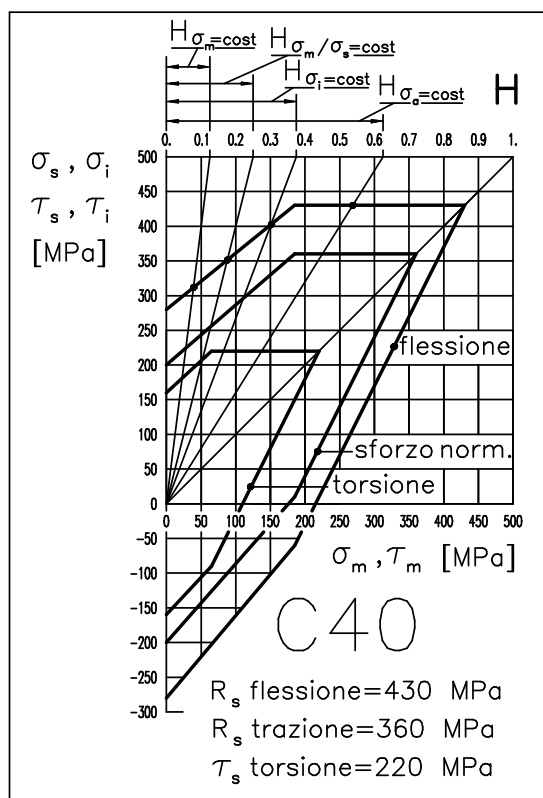


Figura 6.2.3

Riportando i quattro valori di  $H$  sulla scala 0 - 1 e congiungendo questi punti con l'origine del piano di Goodman, si individuano quattro intersezioni col contorno superiore del diagramma di Goodman flessionale, le quali definiscono quattro valori diversi della tensione superiore critica  $\sigma_{s,c}$ . Dividendo poi queste tensioni critiche per il coefficiente di sicurezza  $n$ , si ottengono le tensioni superiori ammissibili  $\sigma_{s,amm}$ , che permettono di calcolare la lunghezza del lato  $a$  della trave, permettono cioè di progettare la trave secondo l'equazione:

$$\sigma_f = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{M_f}{W} = \sigma_{amm} \Rightarrow \frac{P_s \times l}{\frac{a^3}{6}} = \sigma_{amm} \Rightarrow$$

$$(6.2.11)$$

I valori dei quattro lati  $a$  relativi ai quattro tipi di esplosioni di ciclo sono riportati nella seguente Tabella:

Tipo di esplosione di ciclo	$H$	$s.c$ [MPa]	$s.amm$ [MPa]	$a$ [mm]
A ventaglio	0.25	350	175	23.94
A tensione inferiore costante	0.375	400	200	22.89
A tensione media costante	0.125	315	157.5	24.79
A tensione alterna costante	0.625	430	215	22.35

Si osserva che, se l'esplosione del ciclo di fatica non rientra nelle quattro esplosioni viste, se cioè per esempio lo stato tensionale è tridimensionale e quindi bisogna determinare la tensione ideale media e la tensione ideale alterna (vedi il Capitolo sulle tensioni ideali), allora occorre rappresentare per punti l'esplosione del ciclo fino a che il ciclo a regime, esplodendo, non taglia il contorno di Goodman, definendo così la tensione critica. In questi casi la linea che rappresenta nel piano di Goodman la tensione superiore durante l'esplosione del ciclo può non essere più una retta.

I diagrammi di Goodman presentati nel Paragrafo seguente sono corredati da una scala lineare 0 - 1 con indicata la variabile  $K$ . I risultati teorici di questo Paragrafo indicano però che la variabile più rappresentativa e generale sarebbe  $H$ . Tuttavia, mentre la variabile  $K$  è di comune impiego (questa variabile viene introdotta nei testi anche con altri simboli), l'estensione del coefficiente  $K$  a fornire il coefficiente  $H$  non è contenuta nei testi fondamentali di questa materia, ed è dovuta al prof. C. Innocenti. Per queste ragioni, nelle scale lineari associate ai diagrammi di Goodman si è preferito indicare il coefficiente  $K$  piuttosto che la sua generalizzazione  $H$ .

## 7 Diagrammi di Goodman

Si presentano di seguito alcuni diagrammi di Goodman per acciai e ghise.

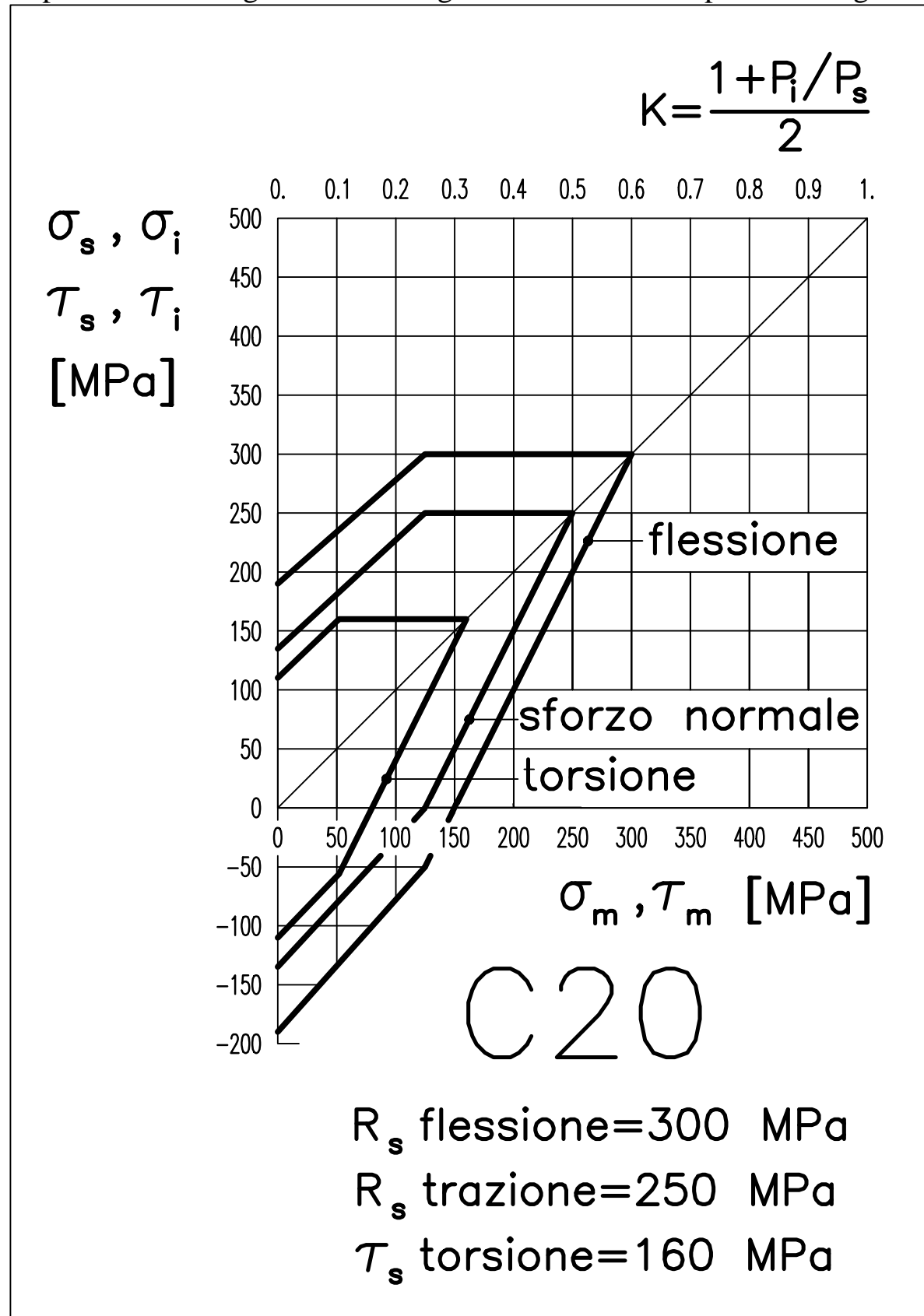


Figura 7.1 : diagramma di Goodman per il C20  
(provino 1740 mm , acciaio bonificato)

Error! Bookmark not defined.

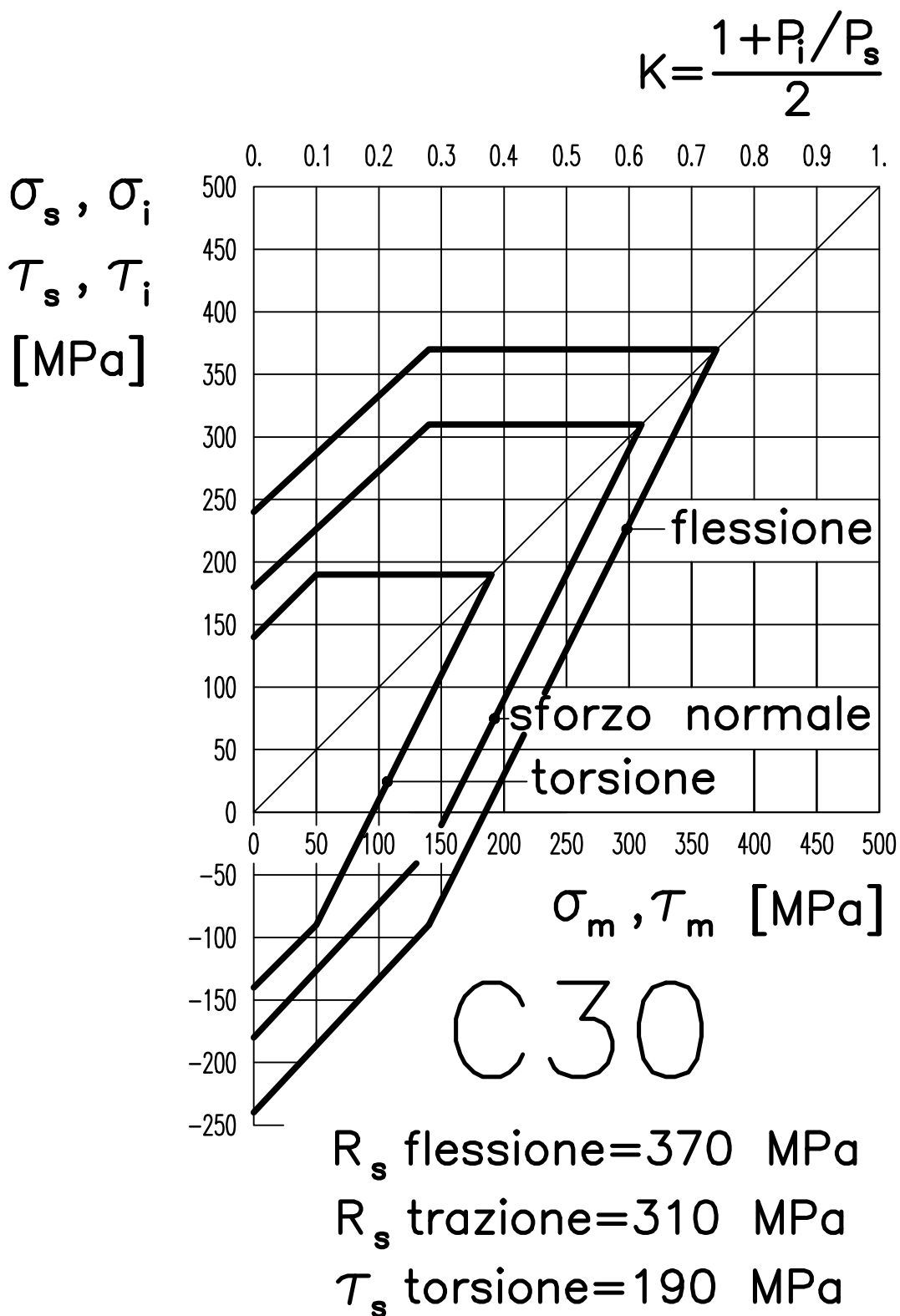


Figura 7.2 : diagramma di Goodman per il C30  
(provino 1740 mm , acciaio bonificato)

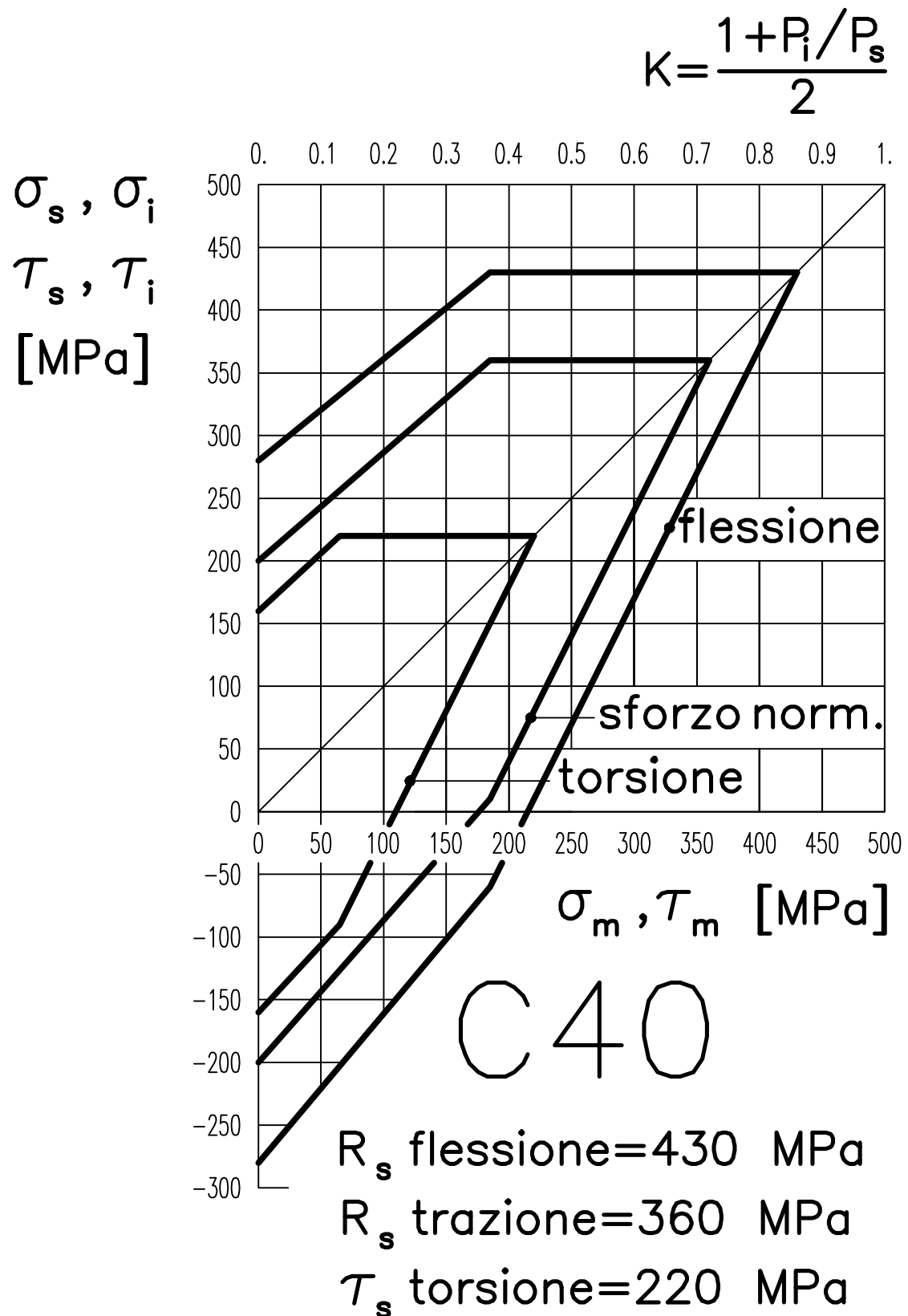


Figura 7.3 : diagramma di Goodman per il C40  
(provino 1740 mm , acciaio bonificato)



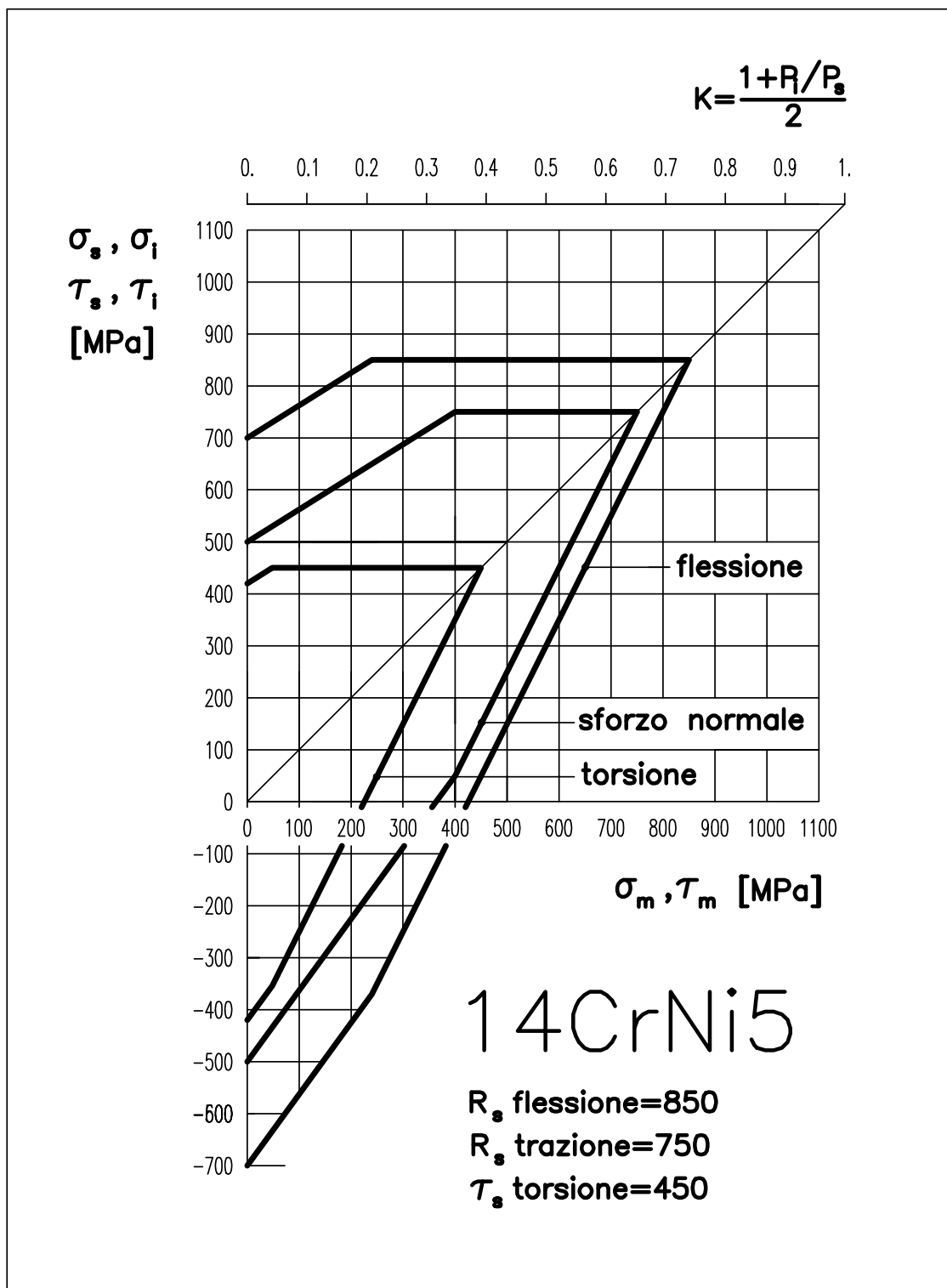


Figura 7.4 : diagramma di Goodman per il 14CrNi5  
(provino 8 mm , acciaio cementato)

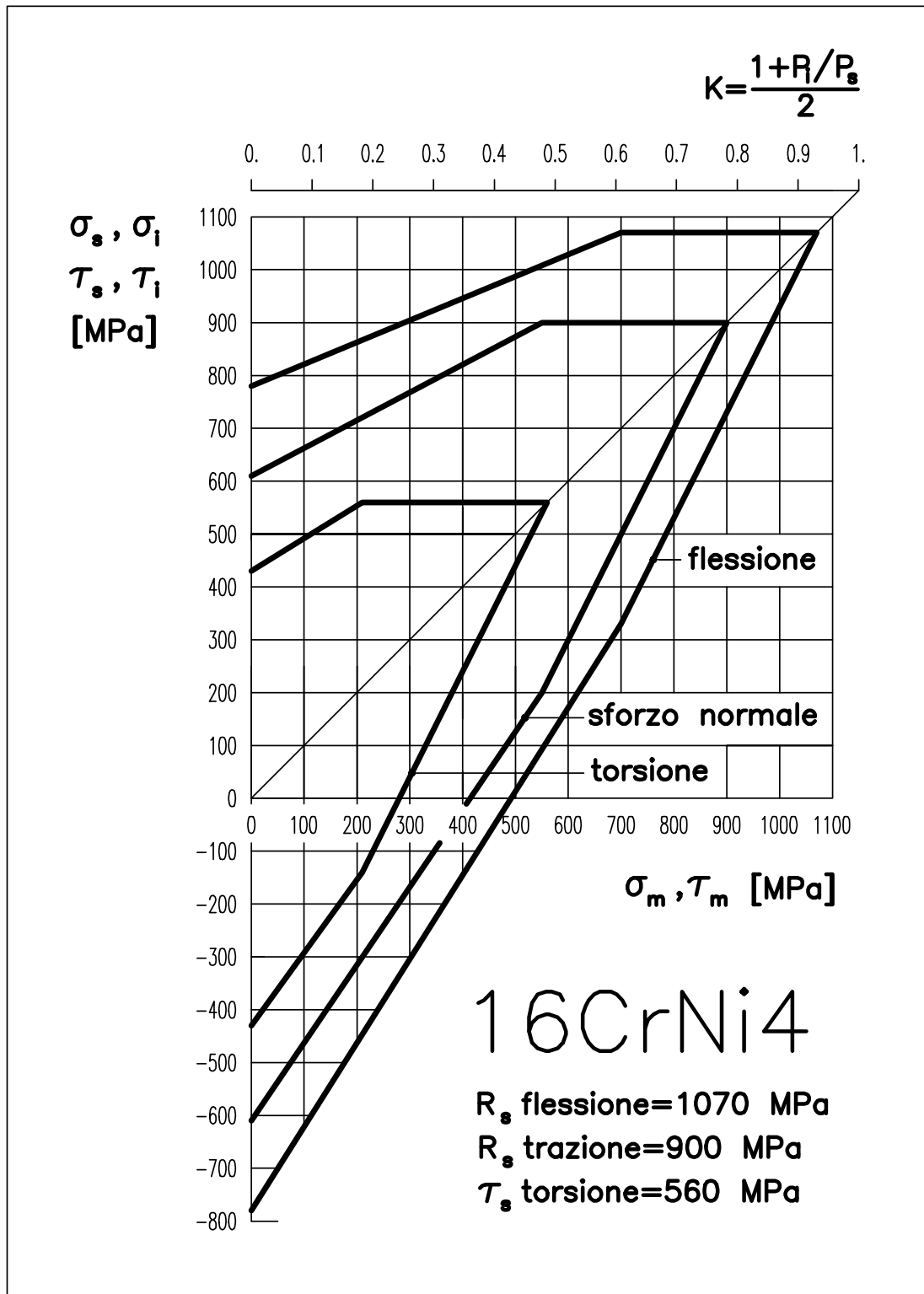


Figura 7.5 : diagramma di Goodman per il 16CrNi4  
 (provino 16 mm , acciaio cementato)

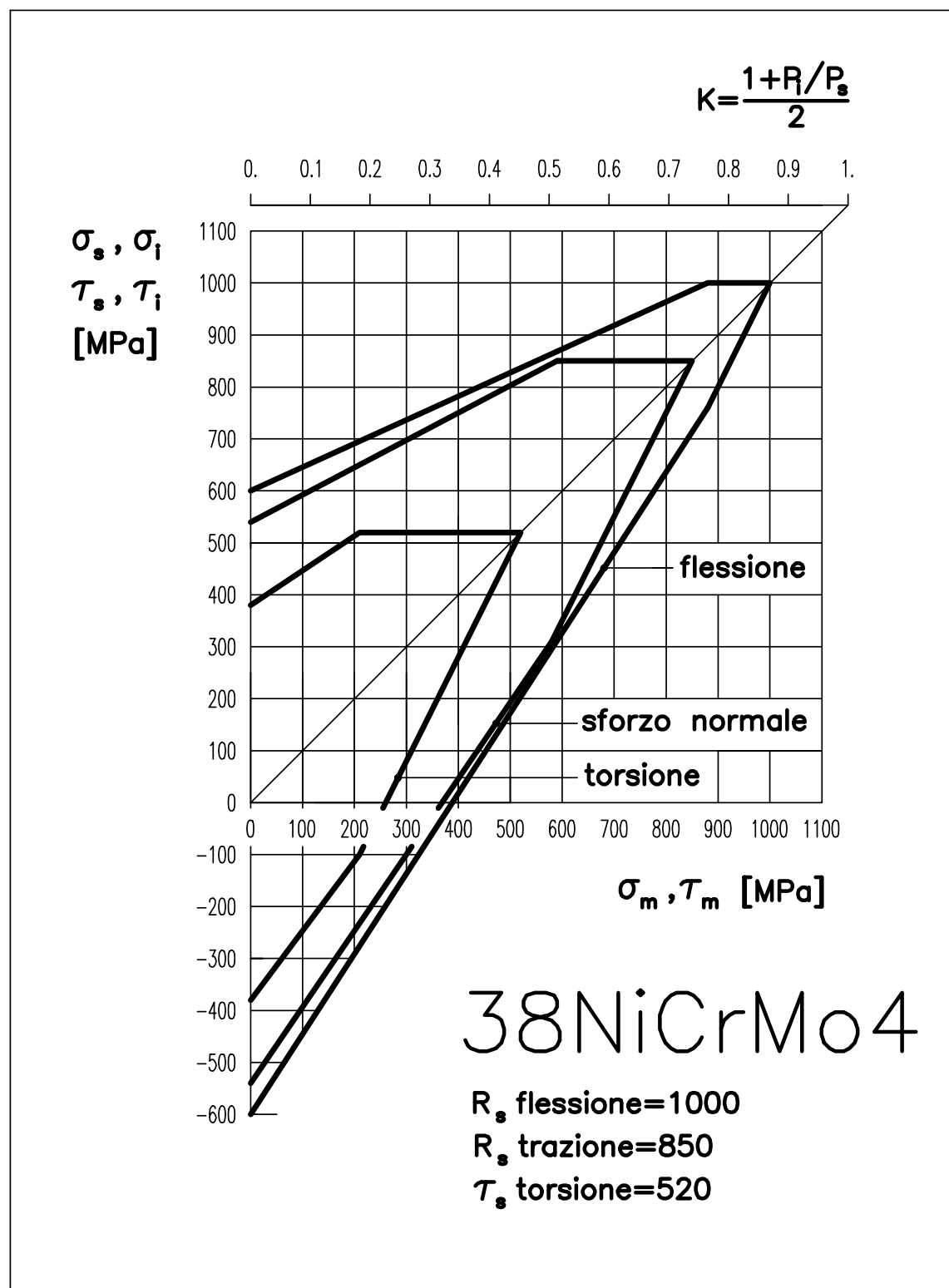


Figura 7.6 : diagramma di Goodman per il 38NiCrMo4  
 (provino 16 mm , acciaio bonificato)

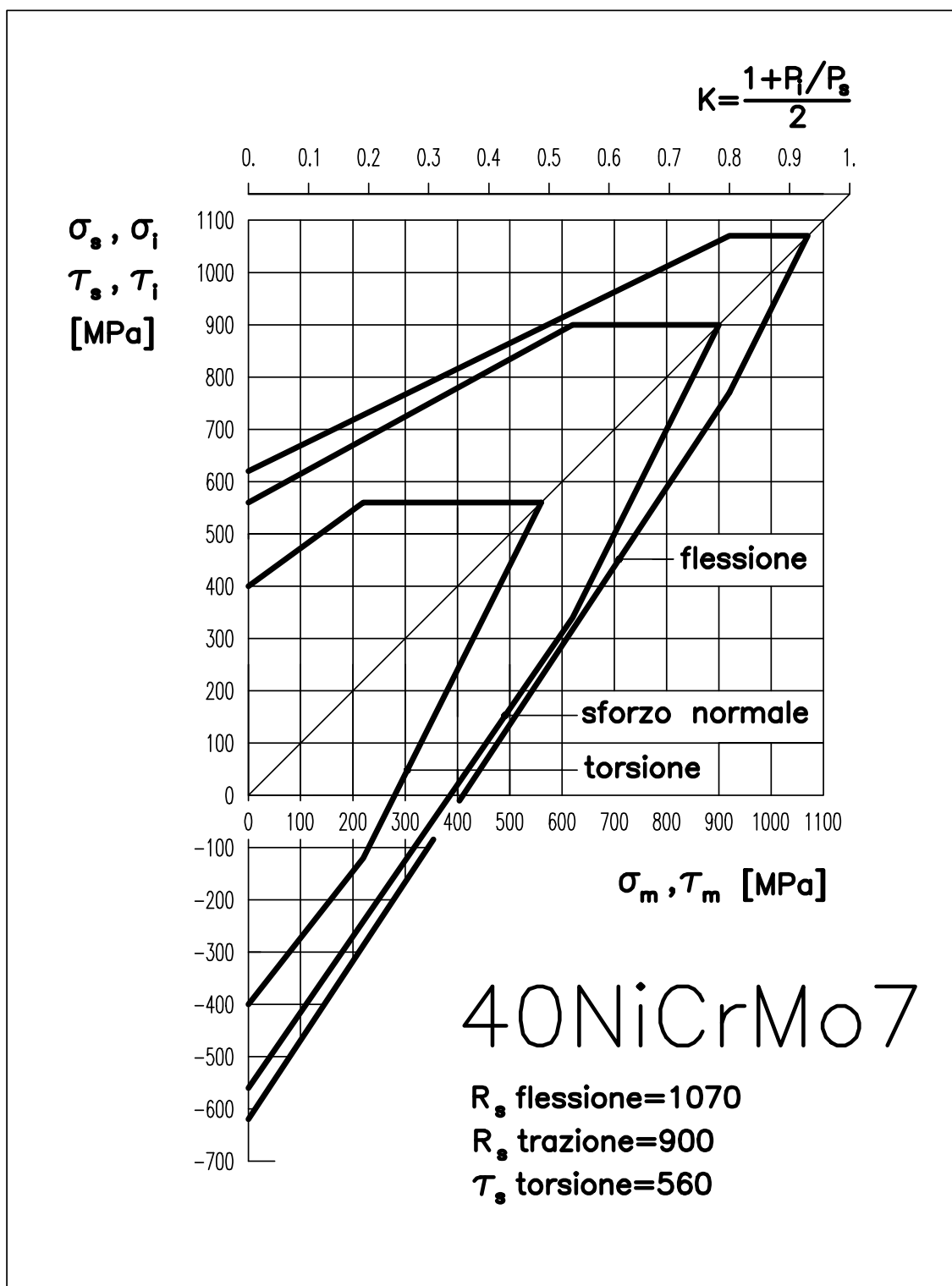


Figura 7.7 : diagramma di Goodman per il 40NiCrMo7  
(provino 16 mm , acciaio bonificato)

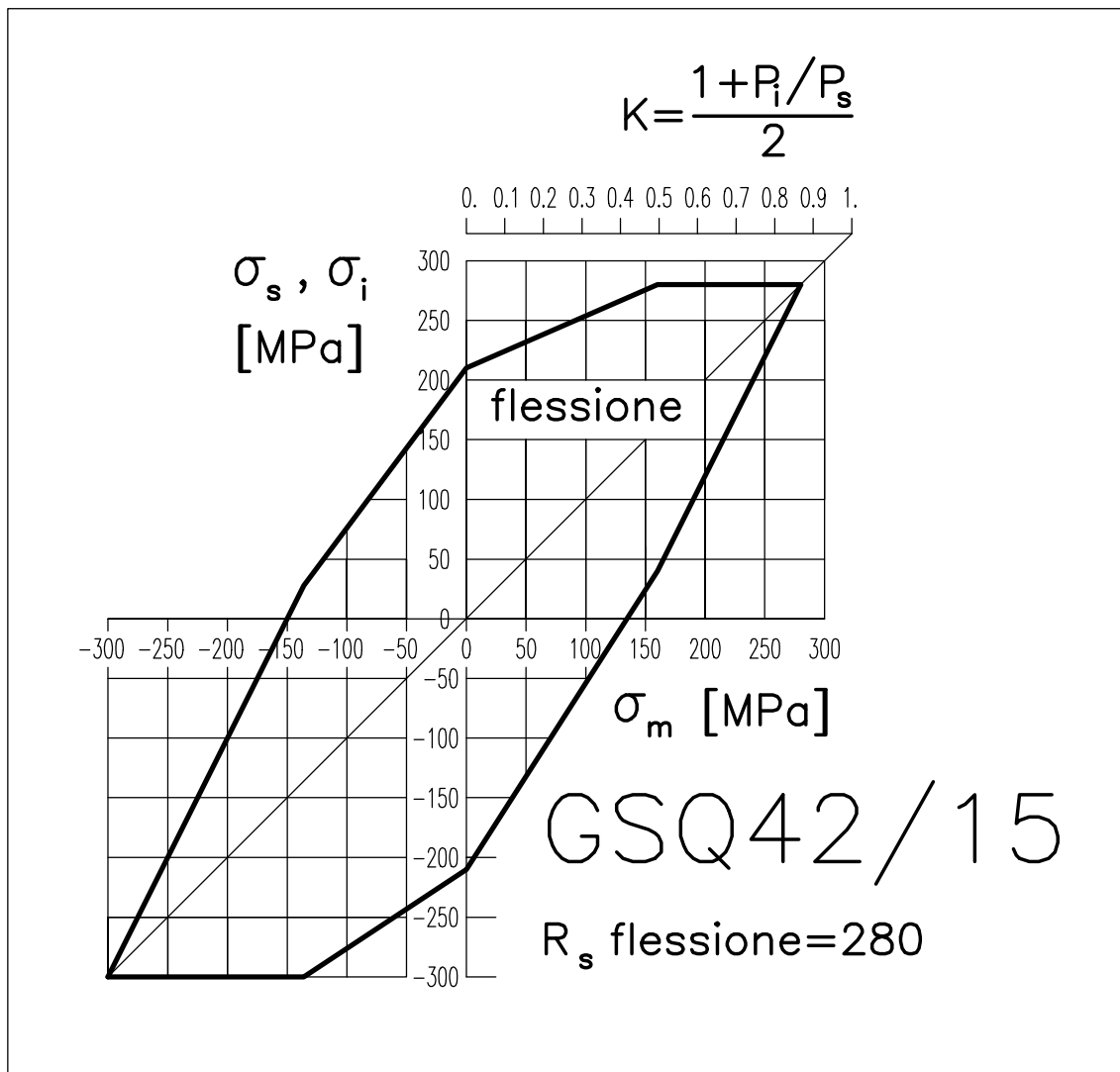


Figura 7.8 : diagramma di Goodman per la Ghisa di qualità GSQ42/15

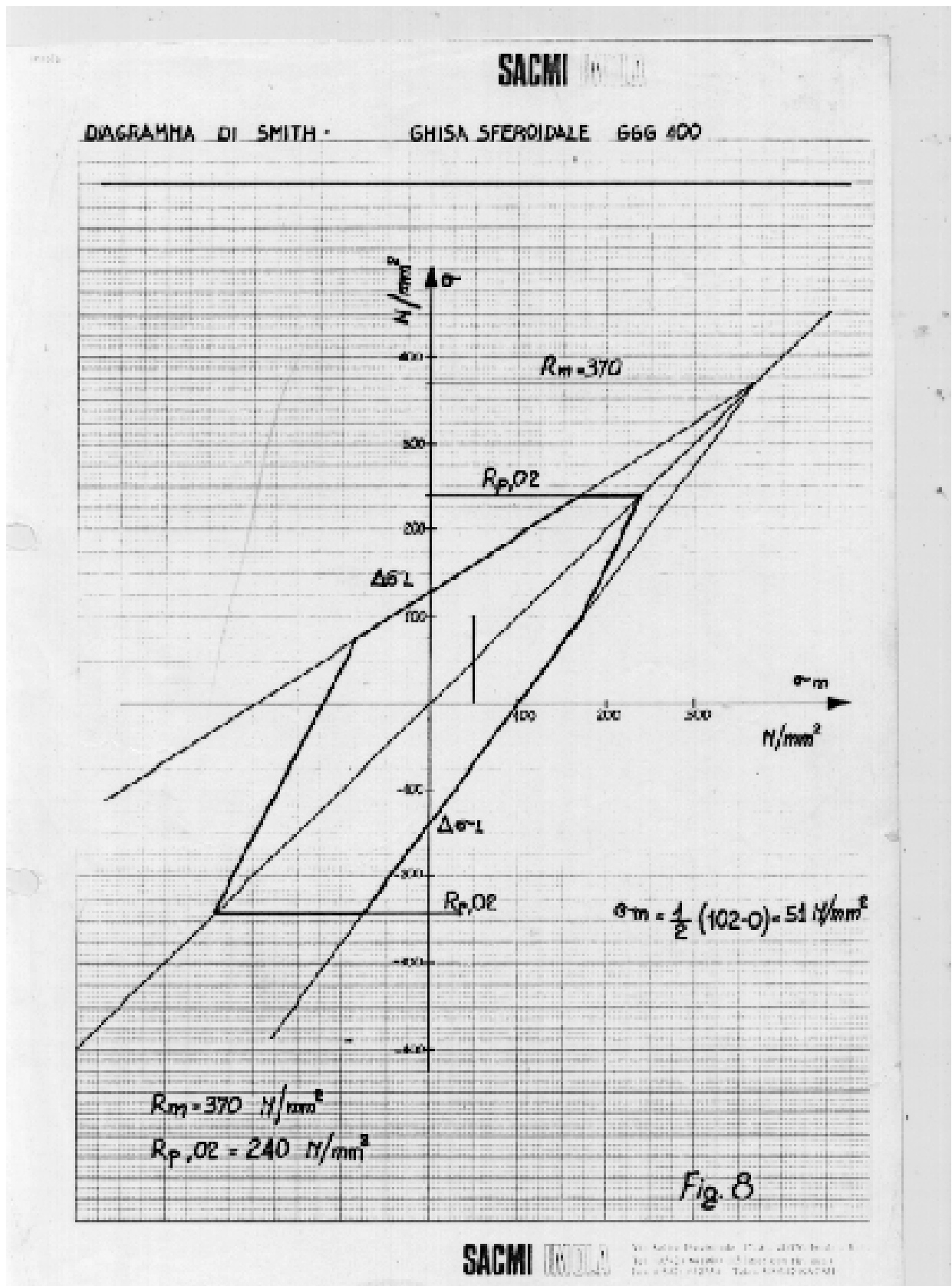


Figura 7.9 : diagramma di Goodman per una Ghisa di qualità.

## 8 Diagrammi di Wöhler

Si presentano nel seguito alcuni diagrammi di Wöhler per acciai. I cicli considerati sono di flessione, trazione-compressione, e torsione, ma sempre solo all'inversione.

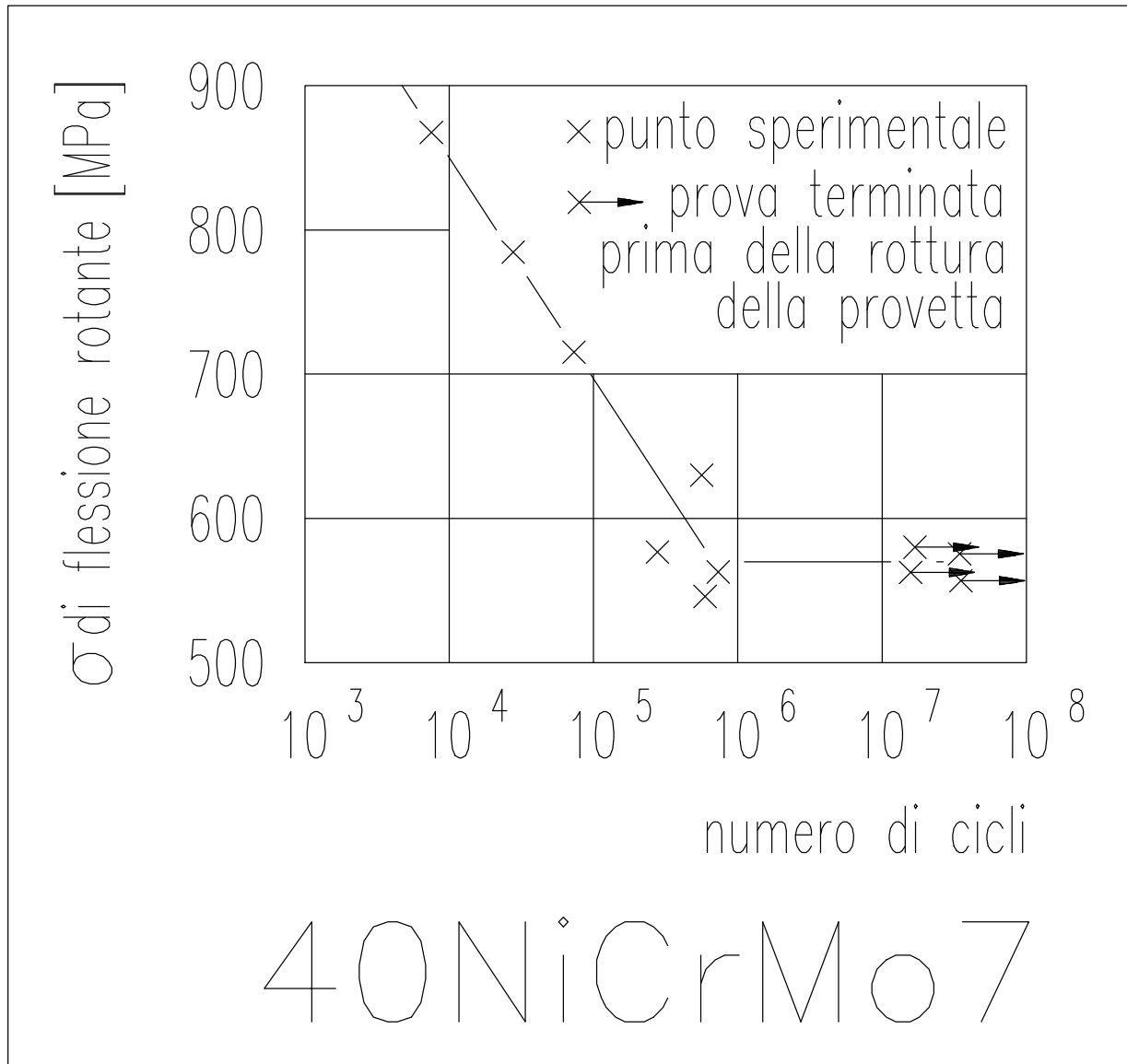


Figura 8.1 : diagramma di Wöhler a flessione rotante per il 40NiCrMo7 (provino 7 mm , acciaio bonificato)

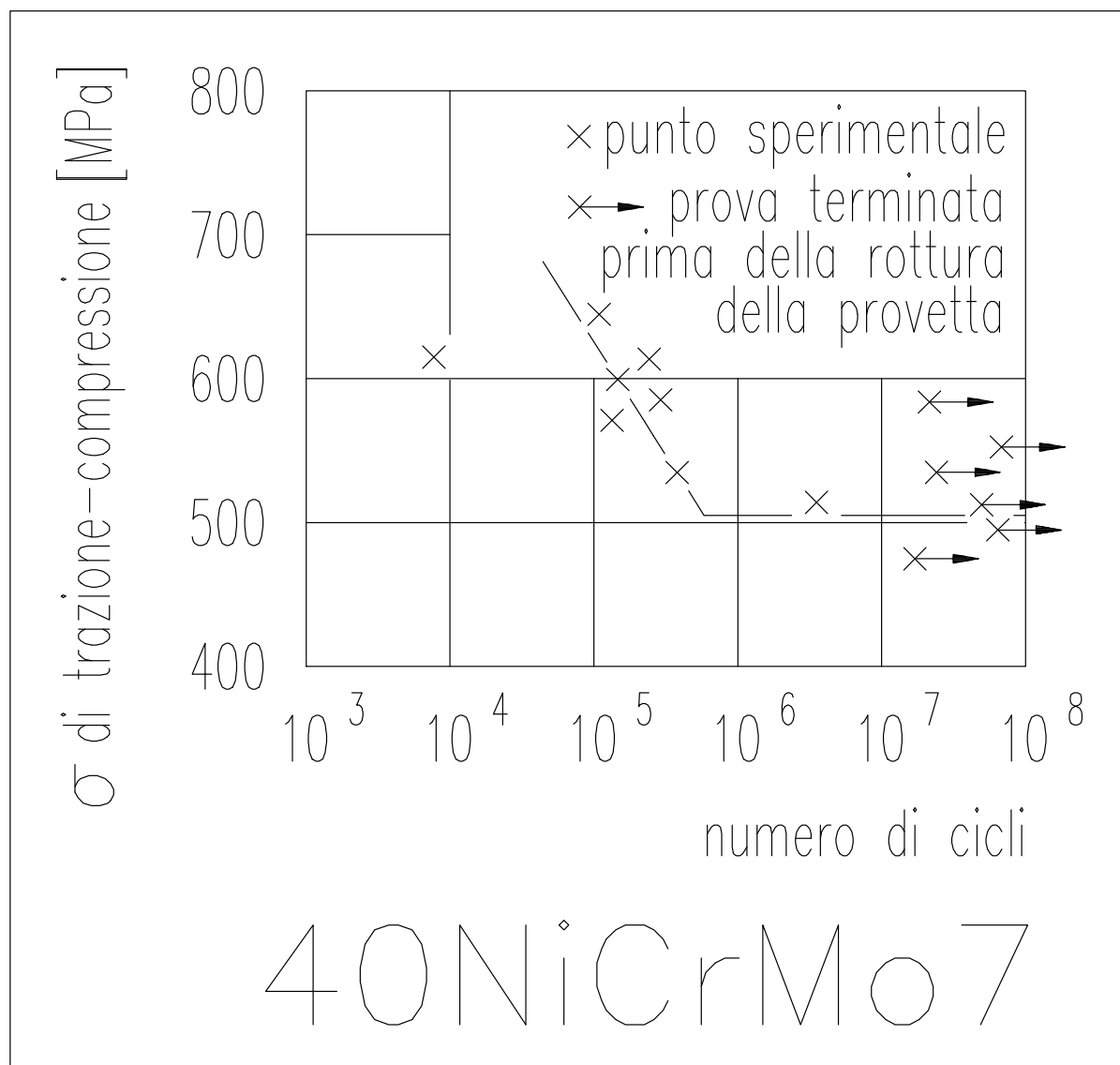


Figura 8.2 : diagramma di Wöhler a trazione-compressione per il 40NiCrMo7 (provino 5.7 mm , acciaio bonificato)





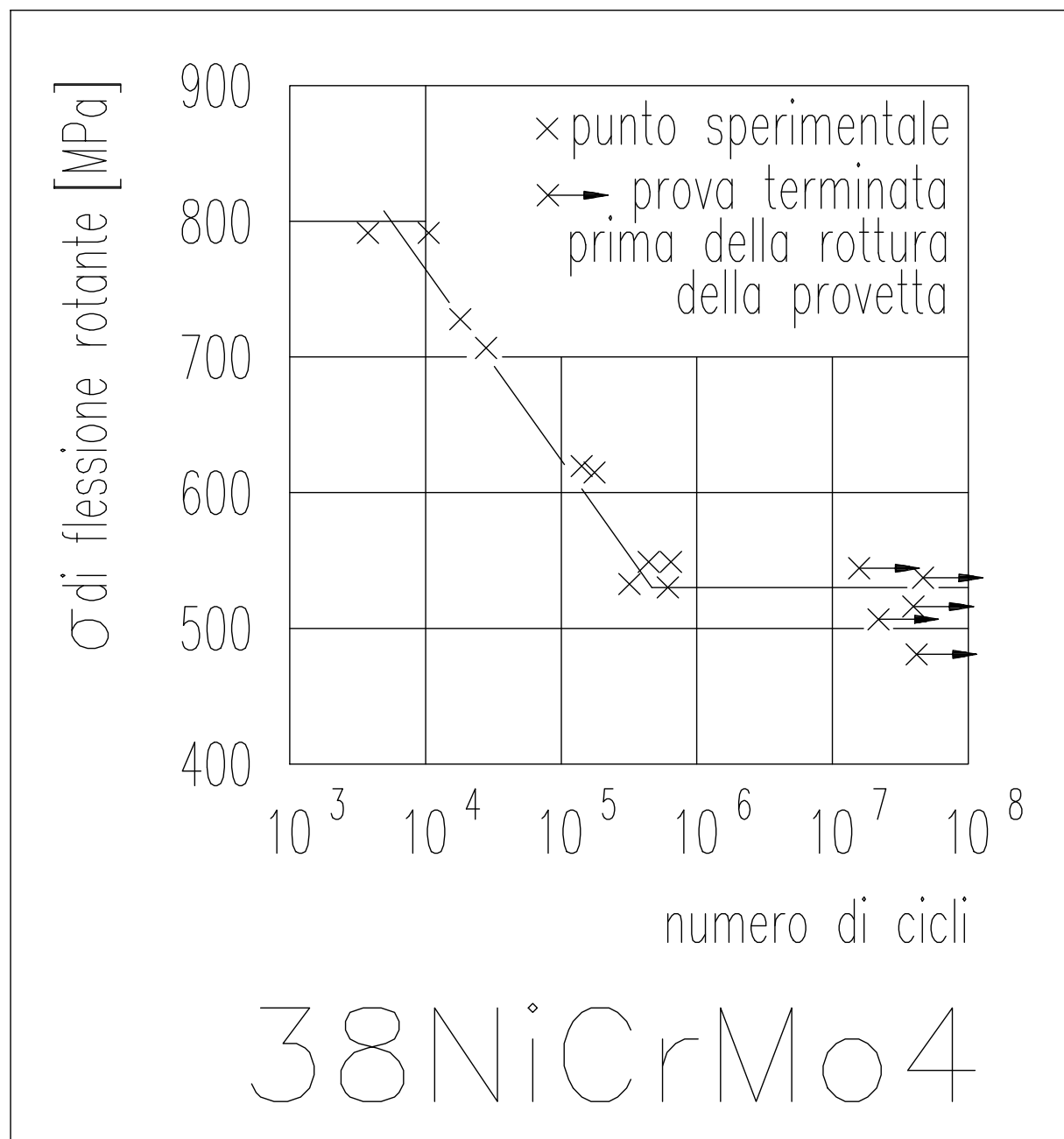


Figura 8.4 : diagramma di Wöhler a flessione rotante per il 38NiCrMo4  
 (provino 7 mm , acciaio bonificato)

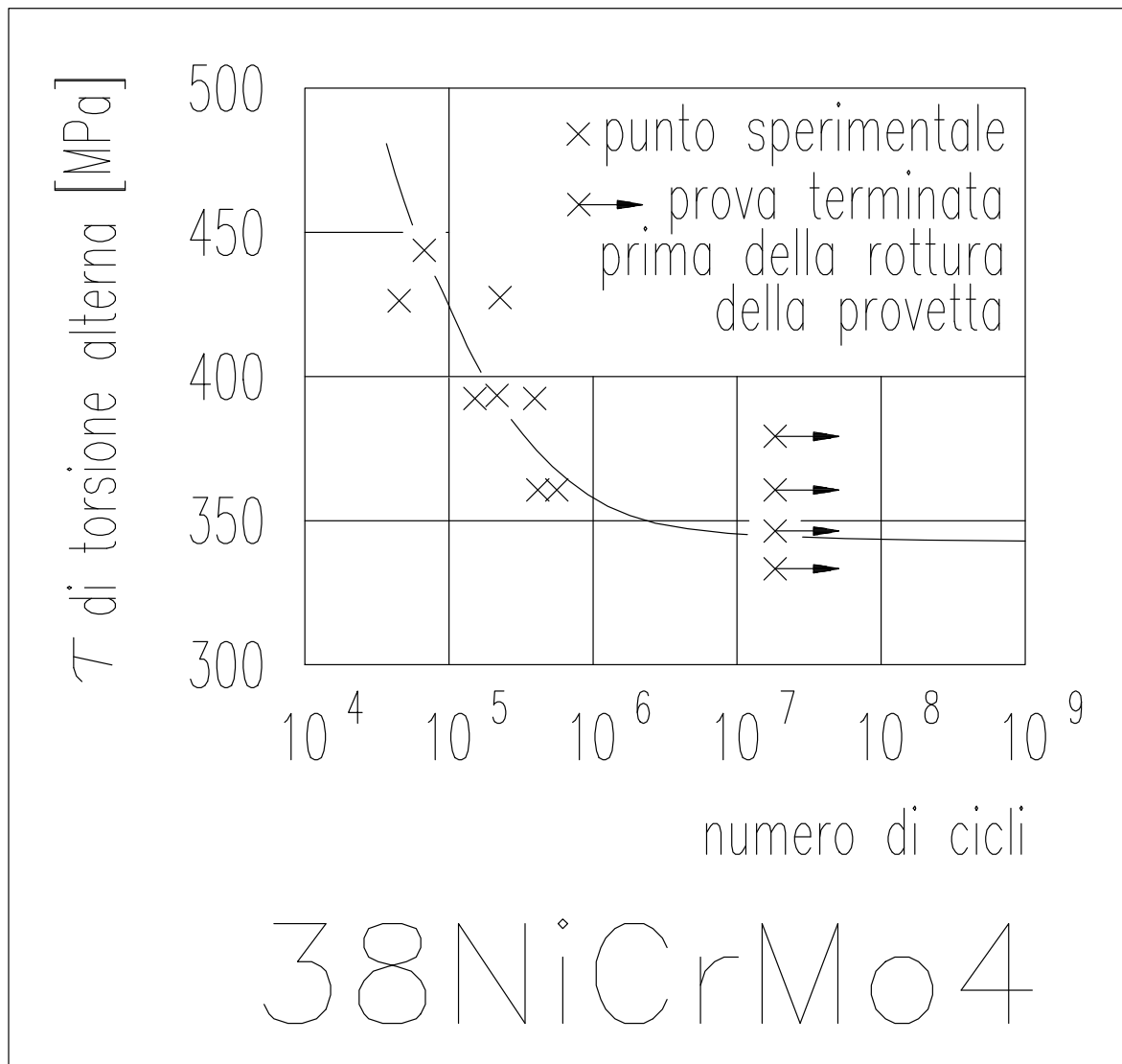


Figura 8.5 : diagramma di Wöhler a torsione alterna per il 38NiCrMo4 (provino 7.6 mm , acciaio bonificato)

## 9 Esercizi svolti

**9.1** Si consideri la lastra forata di Figura 9.1.1 , realizzata in C40 , soggetta al carico  $P$  che varia nel tempo seguendo un ciclo all'inversione. Sorge questo problema: quando si effettua un calcolo a resistenza a fatica all'inversione a vita infinita della lastra forata, occorre impiegare come

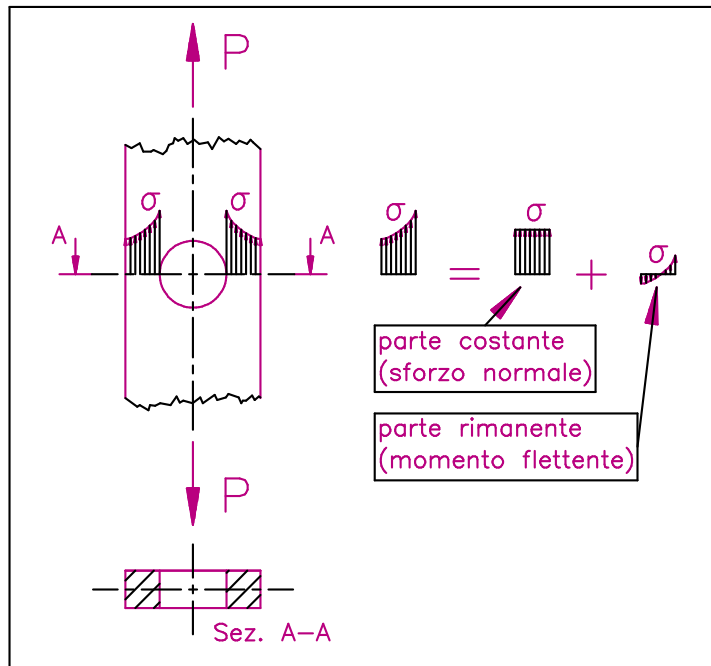


Figura 9.1.1

calcoli la tensione di criticità all'inversione relativa allo sforzo normale. Si osserva però che lo stato tensionale nell'intorno del foro non è uniforme, ma presenta picchi pronunciati ai fianchi del foro. In altre parole, mentre nella zona della lastra lontana dal foro lo stato tensionale è uniforme, nella porzione della lastra in prossimità del foro, dove cade la tensione massima e dove quindi dove va effettuato il calcolo a resistenza, lo stato tensionale non è uniforme, per cui non è rigoroso impiegare nei calcoli la tensione di criticità relativa allo sforzo normale.

Si può interpretare il diagramma della tensione nella sezione indebolita da foro, sezione A-A di Figura 9.1.1 , come somma di due parti, dove la prima parte esprime il valor medio del diagramma tensionale, e quindi è uniforme, mentre la seconda parte rappresenta la parte mancante a riformare il diagramma iniziale, ed è essenzialmente a farfalla. Nei calcoli a resistenza, si potrebbe confrontare la parte uniforme alla tensione di criticità di sforzo normale, e la parte essenzialmente a farfalla alla tensione di criticità di momento flettente. Anche se le formule di tensione ideale in fatica permetterebbero di seguire un tale approccio (è disponibile una

tensione di confronto la tensione di criticità all'inversione relativa allo sforzo normale (200 MPa) od al momento flettente (280 MPa) ? In altre parole, la tensione critica all' inversione va estratta dal diagramma di Goodman dello sforzo normale o del momento flettente?

La lastra nella sua globalità è soggetta ad un carico  $P$  di sforzo normale, per cui sembrerebbe a prima vista corretto impiegare nei

formula sviluppata per il caso di un albero soggetto a sforzo normale ed a momento flettente), questa via appare troppo complicata da un punto di vista applicativo.

Normalmente si adotta questo criterio: se l'organo meccanico possiede una geometria chiaramente trabeiforme, e quindi se le tensioni sono uniassiali, di sforzo normale, di momento flettente, o di torsione (di solito si trascura il taglio), allora nei calcoli a resistenza le tensioni nel componente meccanico vanno confrontate con le tensioni critiche relative allo sforzo normale, al momento flettente, ed alla torsione, estratte dal diagramma di Goodman. Componenti meccanici di geometria trabeiforme sono gli alberi di trasmissione, le molle a balestra e ad elica cilindrica, i ganci, il fusto di biella, il piede di biella. Se invece l'organo meccanico non possiede più una geometria trabeiforme, non è più possibile distinguere se la tensione è di sforzo normale o di flessione, per cui solitamente si confronta la tensione nell'organo con la tensione critica flessionale come estratta dal diagramma di Goodman. Si preferisce impiegare la tensione critica flessionale e non di sforzo normale, semplicemente perché il diagramma di Goodman flessionale è più frequentemente disponibile di quello a sforzo normale. Si noti però che, siccome il diagramma di Goodman flessionale è maggiore di quello a sforzo normale, e quindi le

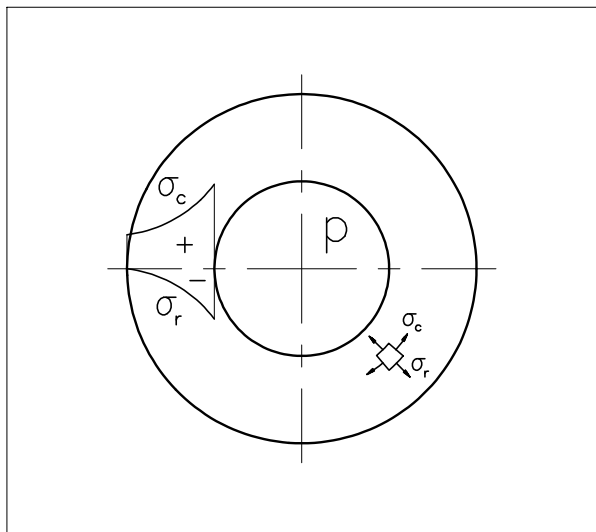


Figura 9.1.2

tensioni critiche flessionali, sia per cicli all'origine che all'inversione, sono maggiori delle corrispondenti tensioni critiche di sforzo normale, l'adottare la tensione di criticità flessionale è a sfavore della sicurezza, anche se lievemente, rispetto all'impiego della tensione di criticità a sforzo normale. Componenti meccanici di geometria non più trabeiforme sono i tubi, la forcella del collegamento a spinotto e forcella, e gli spinotti automobilistici. Gli spinotti automobilistici possiedono ancora

una geometria a trave, ma lo stato tensionale non è più uniassiale, dato che coesistono tensioni flessionali ed ovalizzanti.

La Figura 9.1.2 presenta appunto un tubo, dove lo stato tensionale nel piano delle tensioni è caratterizzato da una tensione radiale,  $r$ , e da una tensione circonferenziale,  $c$ . Lo stato tensionale non è quindi più uniassiale, e perciò non più paragonabile allo stato tensionale in una trave.

Anche in questo caso, si potrebbe pensare di distinguere nelle tensioni la parte media, uniforme, dalla parte rimanente, circa a farfalla. Questo caso è più complicato di quello della lastra forata di Figura 9.1.1 perché lo stato tensionale è più marcatamente bidimensionale. Infatti nella lastra forata esistono lungo la sezione A-A di Figura 9.1.1 essenzialmente tensioni nella direzione del carico, mentre le tensioni nella direzione perpendicolare al carico sono trascurabili. Invece, nel tubo di Figura 9.1.2 la tensione radiale  $r$  e la tensione circonferenziale  $c$  possiedono valori confrontabili.

Nei calcoli a resistenza del tubo, da un punto di vista pratico normalmente si calcola la tensione ideale nel tubo e la si confronta con la tensione di criticità a flessione, e non di criticità a sforzo normale.

## 10 Esercizi proposti

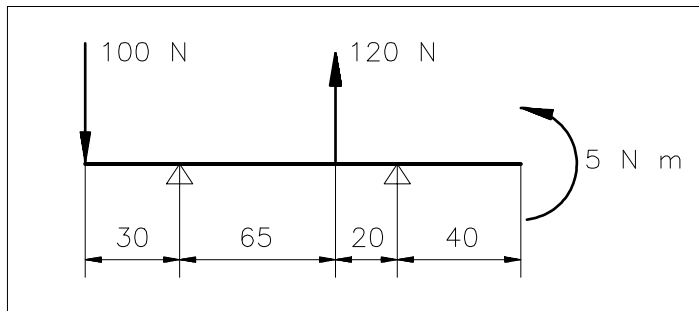
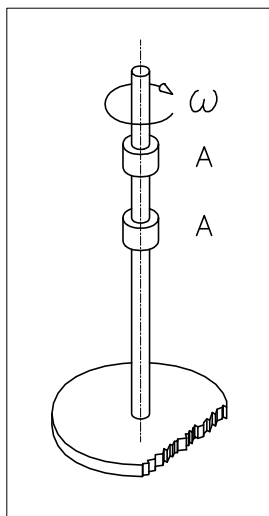


Figura 10.1.1

**10.1** Sia dato l'albero rotante di Figura 10.1.1, con i carichi indicati, non rotanti, e le dimensioni assiali in mm dell'albero. Tracciare il diagramma del momento flettente quantitativo lungo l'albero, e calcolare le tensioni flessionali in



corrispondenza degli appoggi e dei punti di applicazione dei carichi e della coppia, supponendo un diametro costante dell'albero di  $20\text{ mm}$ . Determinare poi il ciclo di fatica delle tensioni flessionali.

**10.2** Si consideri il mescolatore di vernici di Figura 10.2.1, dove lo stelo ruota con velocità angolare  $\omega$ , sostenuto dai due perni A, e dove il disco è danneggiato da una rottura. Determinare se le forze inerziali di squilibrio nel disco causano fatica nello stelo rotante.

Figura 10.2.1

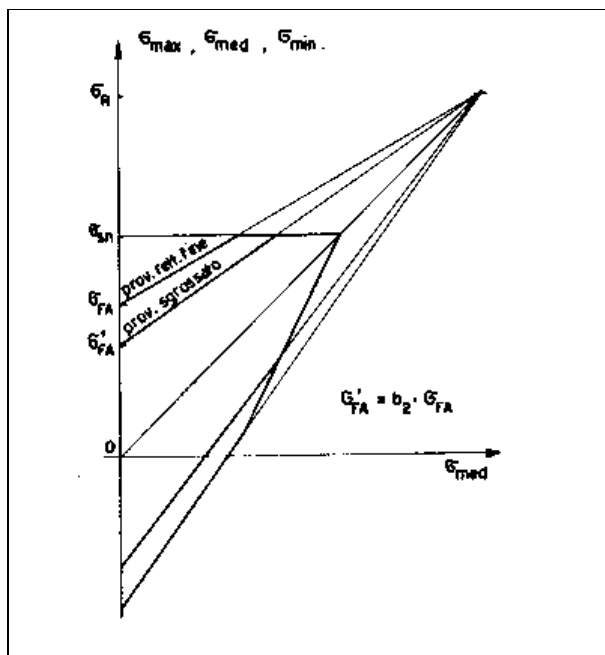


Figura 10.3.1

**10.3** La Figura 10.3.1 presenta un metodo di costruzione approssimata del diagramma di Goodman. Verificare se il bordo del diagramma di Goodman soddisfa le simmetrie che deve rispettare.

**10.4** Si consideri una trave in C40, di lunghezza  $l = 400\text{ mm}$  e di sezione trasversale circolare di diametro  $d$ , incastrata ad una estremità e caricata all'altra estremità da una forza trasversale  $P$  che oscilla tra  $-1200\text{ N}$  e  $+400\text{ N}$ . Si vuole calcolare tramite il

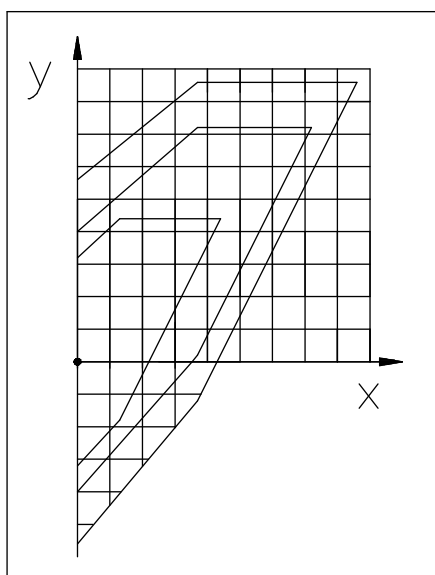


Figura 10.5.1

coefficiente  $K$  il diametro  $d$  per il quale la trave lavora con un coefficiente di sicurezza di 1.7 . Si consideri inoltre il caricamento di una forza trasversale  $P$  che oscilla tra +1200 N e -400 N.

**10.5** Considerare il diagramma di Goodman di Figura 10.5.1 . Indicare i parametri che vanno riportati lungo gli assi  $x$  ed  $y$  . Individuare quali contorni descrivono la torsione, la flessione e lo sforzo normale. Ritenendo poi che il diagramma di Goodman si riferisca al C40 , riportare i valori delle tensioni di snervamento e di criticità all'inversione per la flessione e per la

torsione, memorizzandoli.

**10.6** Si consideri un pedale da bicicletta, ed in particolare l'asta che collega la pedivella al mozzo. Discutere quali sono le caratteristiche di sollecitazione prevalenti nell'asta, ed i corrispondenti cicli di fatica.

**10.7** Si esaminino gli otto diagrammi di Goodman di Figura 10.7.1 , e si discuta quali diagrammi sono errati, e perché.

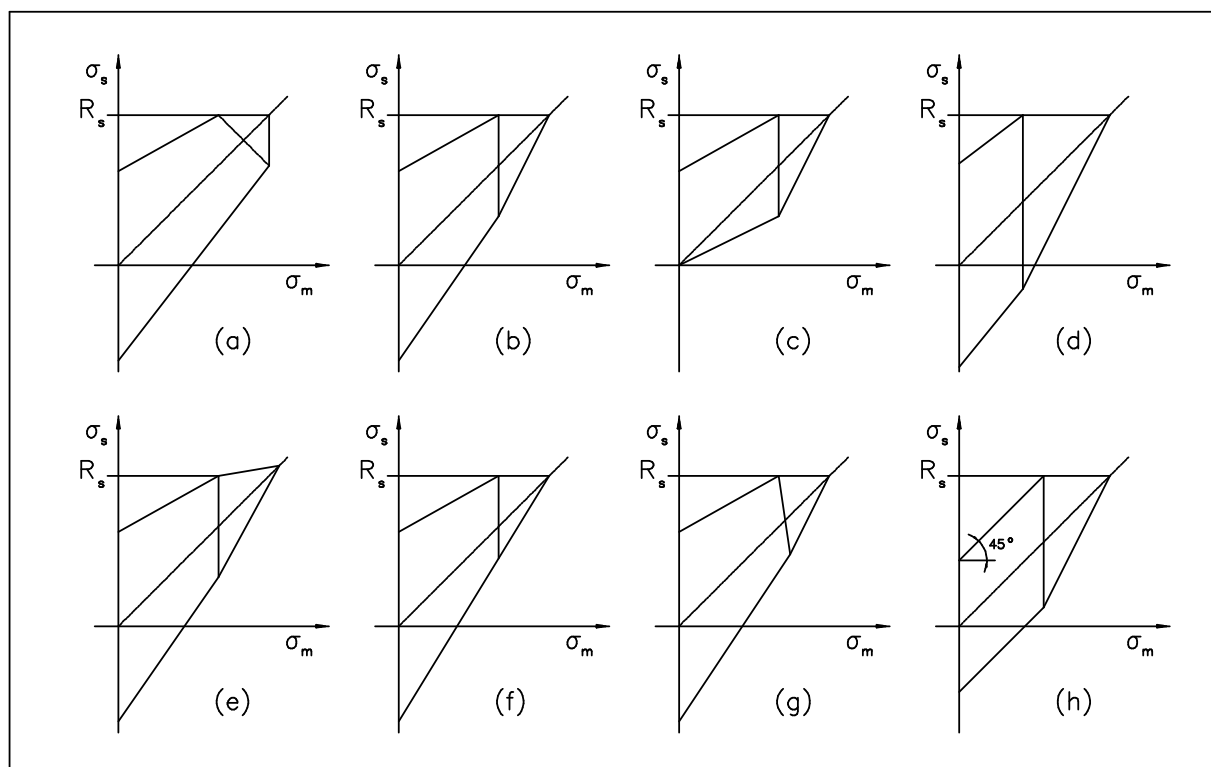


Figura 10.7.1

**Error! Bookmark not defined.**



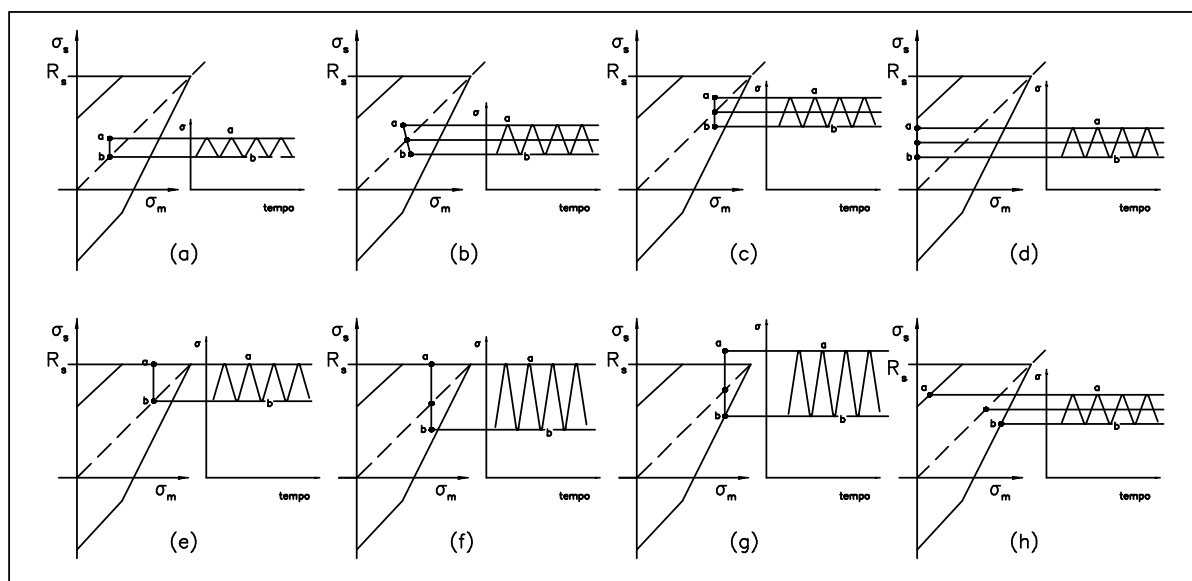


Figura 10.8.1

**10.8** Si considerino le otto rappresentazioni di cicli di fatica nei diagrammi di Goodman di Figura 10.8.1 , e si discuta quali rappresentazioni sono errate, e perché.

**10.9** Esaminare criticamente la seguente frase estratta da un testo di Costruzione di Macchine, collegandola ai coefficienti  $K$  ed  $H$ : *The modified Goodman diagram is particularly useful for analysis when all the dimensions of the part are known and the stress components can be easily calculated. But it is rather difficult to use for design, that is, when the dimensions are unknown.*

**10.10** Si consideri l'albero circolare di Figura 10.10.1 , sostenuto da due

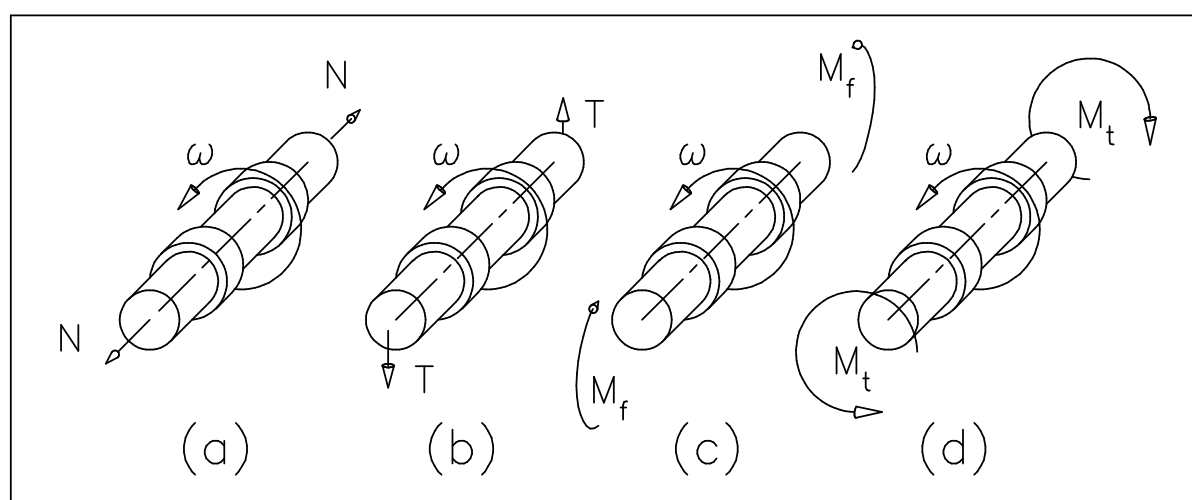


Figura 10.10.1

**Error! Bookmark not defined.**

appoggi, rotante con velocità angolare  $\omega$ , e soggetto a caratteristiche di sollecitazione di (a) sforzo normale  $N$ , (b) taglio  $T$ , (c) momento flettente  $M_f$ , e (d) momento torcente  $M_t$ . I carichi delle caratteristiche di sollecitazione non sono rotanti, ma fissi, e di intensità costante. Determinare per i quattro casi se le corrispondenti tensioni  $\sigma$  e  $\tau$  sono affaticanti all'origine, affaticanti all'inversione, oppure statiche.

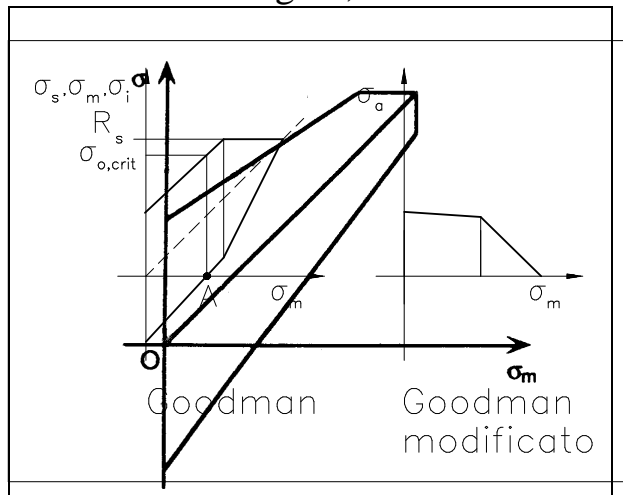


Figura 10.11.1

**10.11** Si consideri il diagramma di Goodman di Figura 10.11.1, estratto da una dispensa di Costruzione di Macchine. Si esamini la correttezza di tale diagramma.

**10.12** Si consideri il diagramma di Goodman ed il diagramma di Goodman modificato, che rappresenta lungo l'asse  $y$  la tensione alterna, entrambi riportati in Figura

10.12.1. Nel diagramma di Goodman la tensione di criticità all'origine si determina tirando una retta verticale a partire dal punto A, e determinando il punto di intersezione col bordo superiore del diagramma di Goodman.

Come si individua la tensione di criticità all'origine a partire dal diagramma di Goodman modificato?

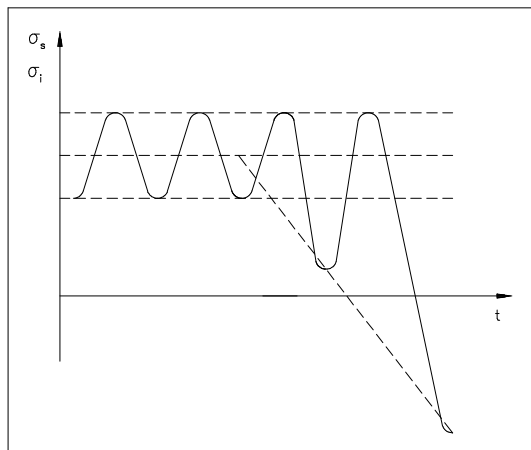


Figura 10.13.1

**10.13** Si esamini l'esplosione del ciclo tensionale di Figura 10.13.1, nella quale la tensione superiore rimane costante, mentre la tensione inferiore esplode verso valori sempre più negativi. Esaminare criticamente come rappresentare tale esplosione del ciclo di fatica nel diagramma di Goodman..

**10.14** Si consideri una trave realizzata in C40 di lunghezza 500 mm e di sezione uniforme quadrata di lato  $a$ , soggetta ad uno sforzo normale variabile tra -18'000 N e +10'000 N. Si considerino le quattro esplosioni di ciclo illustrate nel Paragrafo 5. Si dimensioni il lato della sezione della trave in modo che il coefficiente di sicurezza risulti 2.

**10.15** Determinare per il C20 la tensione critica all'inversione e la tensione ammissibile con un coefficiente di sicurezza di 2 .

**10.16** Si esamini una trave realizzata in C40 di lunghezza 200 mm e di sezione circolare uniforme di diametro  $d$ , incastrata ad un estremo e soggetta ad un carico trasversale applicato all'altra estremità della trave, variabile tra +1'000 N e -500 N. Si considerino le quattro esplosioni di ciclo illustrate nel Paragrafo 5. Si dimensionino il diametro della trave in modo che il coefficiente di sicurezza risulti 1.7 .

**10.17** Si esamini un provino a sezione circolare di diametro  $d = 6$  mm, realizzato in 40NiCrMo7 e soggetto ad una flessione rotante  $M_f = 15$  Nm. Determinare la durata a fatica del provino.

**10.18** Si consideri un provino a sezione circolare di diametro  $d = 7$  mm, realizzato in 38NiCrMo4 e soggetto ad una torsione alterna  $M_t = 27$  Nm. Determinare la durata a fatica del provino.

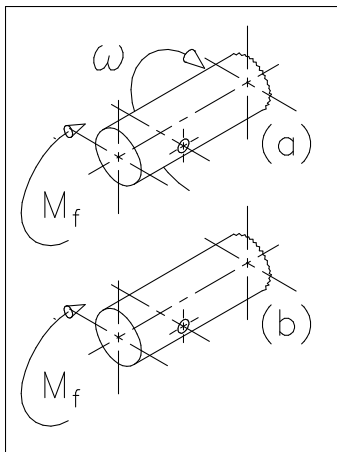


Figura 10.19.1

**10.19** Si consideri l'albero di Figura 10.19.1 con foro trasversale passante, soggetto a flessione. Il piano sul quale agisce il momento flettente rimane fisso. Nel caso (a) l'albero ruota e  $M_f$  rimane di valore costante, mentre nel caso (b) l'albero è fisso e  $M_f$  varia tra il valore rappresentato in disegno ed il suo opposto. Quale situazione è più pericolosa dal punto di vista della resistenza a fatica? Commentare.

**10.20** Se un ciclo di fatica a regime è all'origine, esso rimane all'origine durante l'esplosione del ciclo secondo i quattro tipi di esplosione? Similmente, se un ciclo di fatica è all'inversione a regime, esso rimane all'inversione durante l'esplosione del ciclo secondo i quattro tipi di esplosione?

## 11 Libri contenenti capitoli sulla Fatica

AUTORI VARI (1964). *Manuale per l'uso degli acciai legati da cementazione e da bonifica tipizzati*. Centro di informazione del NICKEL e ASSIDER, Milano.

LOCATI, L. (1950). *La fatica dei materiali metallici*. Hoepli, Milano.

**Error! Bookmark not defined.**

## **12 Articoli sulla Fatica**

PANSERI, C., MORI, L. (1959). Resistenza a fatica a flessione rotante delle principali leghe leggere da lavorazione plastica. Istituto Sperimentale dei Metalli Leggeri, Memoria n. 225, Milano.

INNOCENTI, C. (2000). Estensione del coefficiente  $K$  ad esplosioni del ciclo di fatica non a ventaglio. Comunicazione privata.

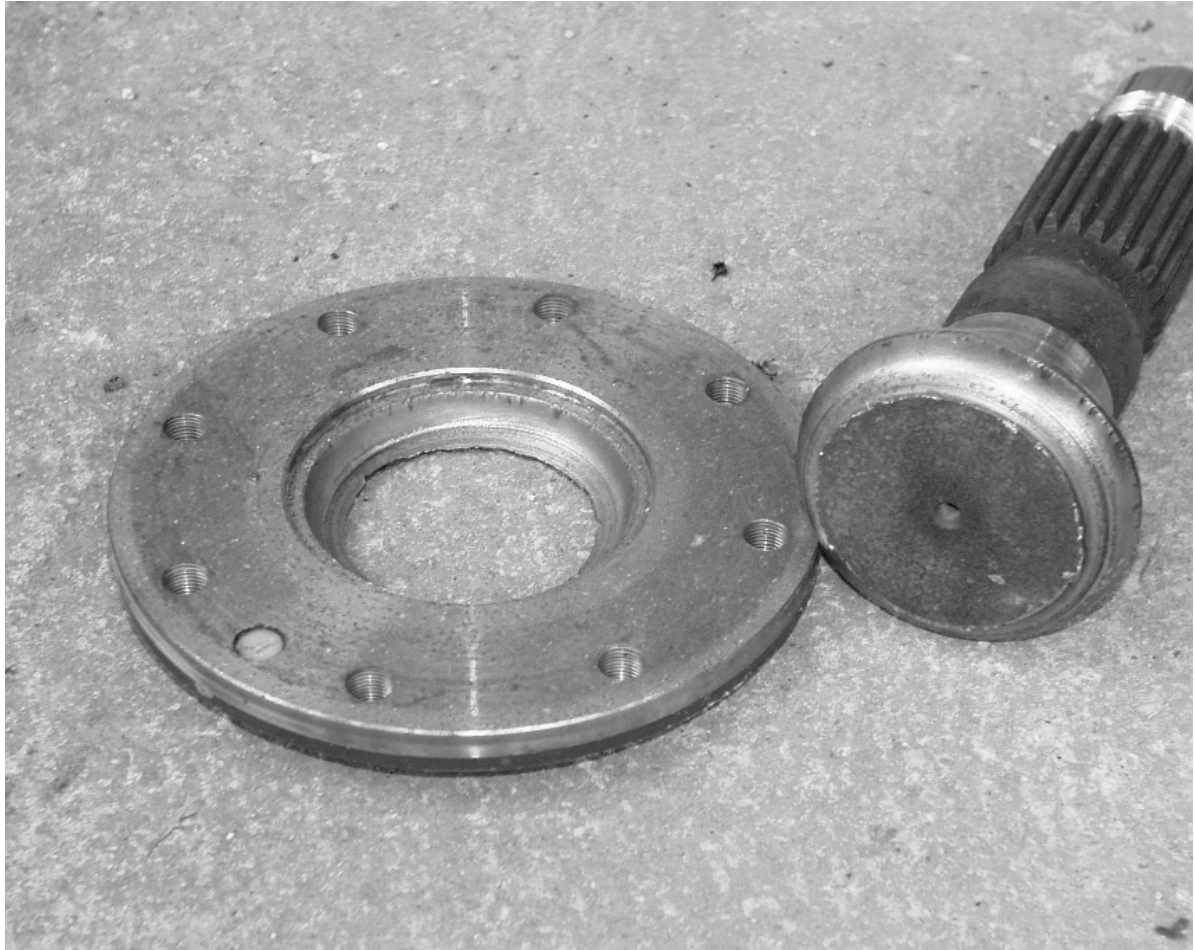
Soderberg?

Mettere foto rotture per fatica

- +Mettere qualche esercizio su Wohler
- +Esplosione ciclo della Vignocchi.
- +Esercizi sul K
- +Esercizio sul Goodman modificato: come si trova sigma critica origine?
- +Correzione esercizio coeff. K, introducendo un coefficiente di sicurezza.
- +Estensione di Innocenti
- +Pedivella da bici: cicli di fatica
- +Mettere in bibliografia il libro acciai unificati di Molari ed il Locati
- +Mettere diagramma Corradini Alluminio che mostra che non c'è il ginocchio
- +Chiarire diagramma di Haigh (vedi Shigley)
- +Lastra forata: devo impiegare i dati sigam critica in trazione od in flessione? Lo stesso per un tubo in grosso spessore.
- +Esercizio: diagramma Goodman C40: ridisegnare le variabili che caratterizzano gli assi x ed y , ed i valori caratteristici di flessione e torsione
- +Rifare Figura Sacmi
- +Esercizio su K
- +Disegno Pratelli
- + dimensioni normali provino (da libro fatica di Molari (acciai tipizzati))
- + esempio Wohler: dopo quanti cicli il materiale collassa ?
- + Modo povero di costruirle Goodman
- + la frequenza non è importante nella determinazione della tensione critica
- + mescolatore di vernici
- +difficoltà posizione origine diagramma logaritmico
- +Rottura fragile e duttile (vetro ....
- +Nota Giovannozzi di diagramma semi o bilogaritmico
- +cumulo di fatica
- +diagrammi a torsione ed a flessione
- +critiche alla tensione critica con Goodman : si usa Goodman per un ciclo non stabile nel tempo; si approssima una funzione continua con una discontinua.
- +la vera fatica è solo all'inversione. all'origine è circa statica
- +lo spigolo di Goodman cade circa sull'asse x .
- +dire che basterebbe metà Goodman



**Error! Bookmark not defined.**



**Error! Bookmark not defined.**